Darstellung verschiedener Beugungsfelder skalarer und elektromagnetischer Wellen mittels Kugelfunktionen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

der

Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Eberhard-Karls-Universität

zu Tübingen

vorgelegt von

AWAD BASTAWROS

aus Benimazar / V. A. R.

1964

7756

Darstellung verschiedener Beugungsfelder skalarer und elektromagnetischer Wellen mittels Kugelfunktionen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

der

Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Eberhard-Karls-Universität

zu Tübingen

vorgelegt von

AWAD BASTAWROS

aus Benimazar / V. A. R.

1964

U. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Mai 1964

Dekan : Prof. Dr. P. Roquette

1. Berichterstatter : Prof. Dr. W. Braunbek

2. Berichterstatter : Prof. Dr. G. Elwert

Fotodruck PRÄZIS · Tübingen

I N H A L T

Einleitung. 1

Die reflektierende Fläche und ihre geometrischen Größen. 2

Formeln und Sätze über Kugelfunktionen. 3

I. Die Lösung für die skalare Welle:

§1. Entwicklung nach Kugelfunktionen. 7

§2. Die niedrigsten Koeffizienten. 10

§3. Die Abhängigkeit von h. 11

§4. Annäherung der Folge: $g_m(\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{m} C^{0}_{0,\nu} P_\nu(\cos\vartheta)$ an $f^{0}_{0}(\vartheta)$. 13

§5. Regeln für $C^{j}_{n,\nu}$. 16

§6. Verlauf der Koeffizienten. 17

§7. Die unmittelbare Lösung. 20

§8. Vergleich mit der früheren Lösung. 23

II. Die Lösung für die elektromagnetische Welle:

A.) Hyperboloid - Dipol in der Symmetrieachse

§1. Entwicklung nach Kugelfunktionen. 24

§2. Die unmittelbare Lösung. 30

§3. Vergleich mit der früheren Lösung. 34

§4. Die cartesischen Komponenten. 35

B.) Hyperboloid - Dipol senkrecht zur Symmetrieachse.

§1. Entwicklung nach Kugelfunktionen. 37

§2. Die unmittelbare Lösung. 42

§3. Die cartesischen Komponenten. 49

C.) Paraboloid - Dipol senkrecht zur Symmetrieachse. 51

Literatur. 54

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547602_0035

E I N L E I T U N G

In dieser Arbeit betrachten wir als einfallende Welle eine von einem der Brennpunkte eines zweischaligen Rotationshyperboloids ausgestrahlte skalare homogene Kugelwelle bzw. eine von einem schwingenden Dipol im Brennpunkt des Hyperboloids ausgestrahlte elektromagnetische Welle, welche auf die konvexe Seite der anderen Schale des Hyperboloids auffällt.

Im ersten Fall gilt als Randbedingung, daß die Amplitude auf der Fläche verschwindet. Im zweiten Fall, der für zwei verschiedene Orientierungen des Dipols durchgeführt wird, wird angenommen, daß die reflektierende Fläche ideal leitend ist (Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke soll Null sein).

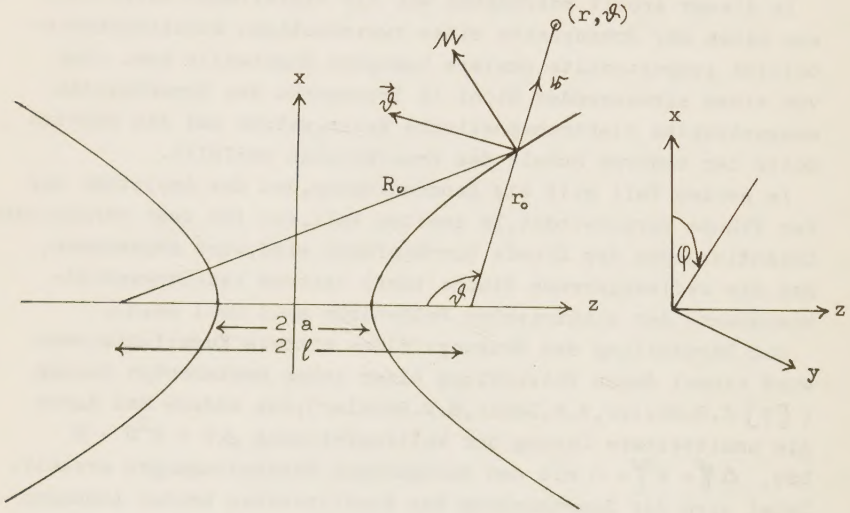
Die Darstellung des Beugungsfeldes mittels Kugelfunktionen wird einmal durch Entwicklung einer schon bestehenden Lösung ([3] J.B.Keller, R.M.Lewis, B.D.Seckler), das andere Mal durch die unmittelbare Lösung der Wellengleichung $\Delta U + k^2 U = 0$ bzw. $\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0$ mit den angegebenen Randbedingungen erzielt. Dabei wird der Zusammenhang der Koeffizienten beider Lösungen hergestellt und die Übereinstimmung der Lösungen nachgewiesen.

Bei der skalaren Welle wird in §3 bis §6 die Abhängigkeit der Koeffizienten von der charakteristischen geometrischen Größe h des Hyperboloids diskutiert, einige Regeln für die Koeffizienten hergestellt und eine Übersicht über den Verlauf der Koeffizienten gegeben. Es stellt sich heraus, daß die entstehenden Reihen semikonvergent sind.

Bei der elektromagnetischen Welle wird nachgewiesen, daß das an einer beliebigen rotationssymmetrischen Fläche gebeugte Feld dieselbe Abhängigkeit vom Azimutwinkel φ zeigt, wie das einfallende Feld.

Zum Schluß wird noch für die am Rotationsparaboloid gebeugte elektromagnetische Welle die unmittelbare Lösung durchgeführt. Das Ergebnis stimmt mit der Entwicklung der Schenstedschen Lösung ([6]) nach Kugelfunktionen durch W.Braunbek ([1])überein.

DIE REFLEKTIERENDE FLÄCHE UND IHRE GEOMETRISCHEN GRÖSSEN



Geometrische Größen:

$$h = \frac{a}{\ell} \quad ; \quad \eta = \frac{1+h^2}{2h} \quad ; \quad \sigma = \frac{2h}{1-h^2}$$

Geometrische Beziehungen:

$$R_o = r_o + 2a \quad ; \quad \frac{r_o}{R_o} = \frac{1}{\sigma}\,\frac{1}{\eta+\cos\vartheta} \quad ; \quad \frac{1}{r_o} = \frac{\sigma}{2a}\,(h+\cos\vartheta)$$

Die Flächennormale:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{2h(\eta+\cos\vartheta)}}\left[(h+\cos\vartheta)\cdot\vec{\imath} + \sin\vartheta\cdot\vec{\vartheta}\right]$$

FORMELN UND SÄTZE ÜBER KUGELFUNKTIONEN

Für die Legendreschen Polynome 1.Art $P_n^m(\xi)$ gilt :

$$\left[(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\frac{d}{d\xi} - \frac{m^2}{1-\xi^2} + n(n+1)\right] P_n^m(\xi) = 0 , \tag{1}$$

was für $\xi = \cos\vartheta$ gleichbedeutend ist mit :

$$\left[\frac{d^2}{d\vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta\frac{d}{d\vartheta} - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta} + n(n+1)\right] P_n^m(\cos\vartheta) = 0 \tag{2}$$

Ferner gilt :

$$P_n^m(\xi) = (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n^o(\xi)}{d\xi^m} \tag{3}$$

$$\frac{d P_n^m(\cos\vartheta)}{d\vartheta} = m.\operatorname{cotg}\vartheta P_n^m - P_n^{m+1} \tag{4}$$

Für $m \leqq 2$ gilt :

$$(1-\xi^2)\frac{d P_n^o}{d\xi} = \sin\vartheta P_n^1 = \frac{n(n+1)}{2n+1}\left[P_{n-1}^o - P_{n+1}^o\right] \tag{5}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left[P_{n+1}^o - P_{n-1}^o\right] = (2n+1) P_n^o \tag{6}$$

$$\xi P_n^o = \frac{1}{2n+1}\left[(n+1) P_{n+1}^o + n P_{n-1}^o\right] \tag{7}$$

$$\xi P_n^1 = \frac{1}{2n+1}\left[n P_{n+1}^1 + (n+1) P_{n-1}^1\right] \tag{8}$$

$$\xi P_n^2 = \frac{1}{2n+1}\left[(n-1) P_{n+1}^2 + (n+2) P_{n-1}^2\right] \tag{9}$$

$$n P_n^o = \xi \frac{d P_n^o}{d\xi} - \frac{d P_{n-1}^o}{d\xi} \tag{10}$$

Bei negativem oberem Index gilt :

$P_n^{-m}(\xi) = \frac{1}{m!}\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{\frac{m}{2}} . F(-n,n+1,m+1,\frac{1-\xi}{2})$;F ist die hypergeometrische Funktion :

$$F = 1 - \frac{n(n+1)}{m+1}\frac{1-\xi}{2} + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{1.2.(m+1)(m+2)}\left(\frac{1-\xi}{2}\right)^2 + \ldots \tag{11}$$

Bestimmte Integrale : *)

$$K_n^k = \int_{-1}^{+1} \sigma^k (h+\xi)^k \, P_n^o(\xi) \, d\xi$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^n k(k-1)\ldots(k-n+1)}{2^n . n!} \, \sigma^k \displaystyle\int_{-1}^{+1} (h+\xi)^{k-n} (\xi^2-1)^n \, d\xi \text{, für } k \geqq n \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{12}$$

Mit dem vorigen Integral lassen sich folgende Integrale auswerten:

$$L_n^k = \int_{-1}^{+1} \sigma^k (h+\xi)^k \sin\varphi \, P_n^1(\xi) \, d\xi = \int_{-1}^{+1} \sigma^k (h+\xi)^k (1-\xi^2) \frac{d P_n^o}{d\xi} \, d\xi$$

$$= -\sigma^k \int_{-1}^{+1} P_n^o \left[k(h+\xi)^{k-1}(1-\xi^2) - 2\xi(h+\xi)^k \right] d\xi$$

$$= -\sigma^k \int_{-1}^{+1} P_n^o \left[-(k+2)(h+\xi)^{k+1} + 2(k+1)h(h+\xi)^k + k(1-h^2)(h+\xi)^{k-1} \right] d\xi$$

$$= \begin{cases} \dfrac{k+2}{\sigma} K_n^{k+1} - 2(k+1)h K_n^k - k\sigma(1-h^2) K_n^{k-1} \text{, für } n \leqq k+1 \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{13}$$

$$M_n^k = \int_{-1}^{+1} \sigma^k (h+\xi)^k \sin^2\varphi \, P_n^1(\xi) \, d\xi$$

$$= \int_{-1}^{+1} \sigma^k (h+\xi)^k (1-\xi^2)^2 \frac{d P_n^o}{d\xi} \, d\xi \text{ , was mit (5) ergibt :}$$

$$M_n^k = \int_{-1}^{+1} \sigma^k (h+\xi)^k (1-\xi^2) \frac{n(n+1)}{2n+1} \left[P_{n-1}^o - P_{n+1}^o \right] d\xi$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n(n+1)}{2n+1} \left(N_{n-1}^k - N_{n+1}^k \right) \quad \text{für} \quad n \leqq k+2 \\ 0 \quad \text{sonst , wobei :} \end{cases} \tag{13'}$$

$$N_n^k = \int_{-1}^{+1} \sigma^k (h+\xi)^k \sin^2\varphi \, P_n^o(\xi) \, d\xi$$

$$= \begin{cases} (1-h^2) K_n^k + \dfrac{2h}{\sigma} K_n^{k+1} - \dfrac{1}{\sigma^2} K_n^{k+2} \quad \text{für} \quad n \leqq k+2 \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{14}$$

Für die Legendreschen Polynome 2.Art $Q_n^m(\xi)$ gelten außer den Beziehungen (1) bis (10) folgende Beziehungen :

---

*) Vergleiche [2] , Literaturverzeichnis

$$\frac{1}{\eta+\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (2n+1)\, P_n^0(\xi) \cdot Q_n^0(\eta) \qquad (15)$$

$$Q_n^0(\eta) = \frac{1}{2} P_n^0(\eta) \cdot \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} - W_{n-1}(\eta) \quad \text{, wobei :} \qquad (16)$$

$$W_{n-1}(\eta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} P_{k-1}^0(\eta) \cdot P_{n-k}^0(\eta)$$

$$Q_n^0(\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{nk} \cdot (\eta + \sqrt{\eta^2-1})^{-k} \quad \text{, wobei :} \qquad (17)$$

$$g_{nk} = \int_0^{\pi} P_n^0(\cos\varphi) \cdot \sin(k\varphi)\, d\varphi$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2(k-n+1)(k-n+3)\ldots(k+n-1)}{(k-n)(k-n+2)\ldots(k+n)} & \text{für } k > n, (k+n) \text{ ungerade} \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases} \qquad (18)$$

Aus den Formeln (1) bis (10) lassen sich folgende Beziehungen ableiten, von denen später Gebrauch gemacht wird.

Mit $\xi = \cos\vartheta$; $\frac{d}{d\xi} = -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}$ folgt aus (1) :

$n(n+1)\sin\vartheta\, P_n^0 = \frac{d}{d\vartheta}\left[(1-\xi^2)\frac{dP_n^0}{d\xi}\right]$, was mit (4) und (5) ergibt :

$$\sin\vartheta\, P_n^0 = \frac{1}{2n+1}\frac{d}{d\vartheta}\left[P_{n-1}^0 - P_{n+1}^0\right] = \frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}^1 - P_{n-1}^1\right] \qquad (19)$$

$$(1-\xi^2)\frac{dP_n^1}{d\xi} = (1-\xi^2)\frac{d}{d\xi}\left[\sin\vartheta \frac{dP_n^0}{d\xi}\right] = \sin\vartheta\left[(1-\xi^2)\frac{d^2P_n^0}{d\xi^2} - \xi\frac{dP_n^0}{d\xi}\right],$$

was mit (1) und (3) ergibt :

$$(1-\xi^2)\frac{dP_n^1}{d\xi} = \sin\vartheta\left[-n(n+1)\, P_n^0 + \xi\frac{dP_n^0}{d\xi}\right] = -n(n+1)\sin\vartheta\, P_n^0 + \xi\, P_n^1$$

Einsetzen von (8) und (19) ergibt :

$$(1-\xi^2)\frac{dP_n^1}{d\xi} = \frac{1}{2n+1}\left[-n^2 P_{n+1}^1 + (n+1)^2 P_{n-1}^1\right], \text{ oder :}$$

$$\sin\vartheta \frac{dP_n^1}{d\vartheta} = \frac{1}{2n+1}\left[n^2 P_{n+1}^1 - (n+1)^2 P_{n-1}^1\right] \qquad (20)$$

$$\cos\vartheta \frac{dP_n^1}{d\vartheta} + \frac{P_n^1}{\sin\vartheta} = \cos\vartheta \frac{d}{d\vartheta}\left[\sin\vartheta \frac{dP_n^0}{d\xi}\right] + \frac{dP_n^0}{d\xi} \quad ,$$

was mit (1) ergibt :

---

*) Für $\eta > 1$ ist der Hauptwert von $\ln \frac{1+\eta}{1-\eta}$, d.h: $\ln \frac{\eta+1}{\eta-1}$ zu nehmen.

$$\cos\vartheta \frac{d P_n^1}{d\vartheta} + \frac{P_n^1}{\sin\vartheta} = (1-\xi^2)\frac{d P_n^0}{d\xi} + n(n+1)\,\xi P_n^0 \qquad (21)$$

Aus (5) , (7) , (21) folgt :

$$\cos\vartheta \frac{d P_n^1}{d\vartheta} + \frac{P_n^1}{\sin\vartheta} = \frac{n(n+1)}{2n+1}\left[n P_{n+1}^0 + (n+1) P_{n-1}^0 \right] \qquad (22)$$

Differentiation von (6) nach ξ und Multiplikation mit $\sin^2\vartheta$

ergibt :

$$\sin\vartheta P_n^1 = \frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}^2 - P_{n-1}^2 \right] \qquad (23)$$

Aus (4) folgt :

$$\cos\vartheta \frac{d P_n^1}{d\vartheta} - \frac{P_n^1}{\sin\vartheta} = \cos\vartheta (\operatorname{cotg}\vartheta P_n^1 - P_n^2) - \frac{P_n^1}{\sin\vartheta}$$

$$= - \sin\vartheta P_n^1 - \xi P_n^2$$

Einsetzen von (9) und (23) ergibt :

$$\cos\vartheta \frac{d P_n^1}{d\vartheta} - \frac{P_n^1}{\sin\vartheta} = - \frac{1}{2n+1}\left[n P_{n+1}^2 + (n+1) P_{n-1}^2 \right] \qquad (24)$$

I. DIE LÖSUNG FÜR DIE SKALARE WELLE

§1. Entwicklung nach Kugelfunktionen

In [3] wurde für die Lösung der Wellengleichung: $\Delta U + k^2 U = 0$ auf Grund einer geometrisch-optischen Überlegung der Ansatz gemacht : $U(r,\vartheta) = e^{ik(r+2a)} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{i}{k})^n . u_n(r,\vartheta)$

Dieser Ansatz lieferte für $u_n(r,\vartheta)$ die Beziehung :

$$\frac{\partial u_n}{\partial r} + \frac{1}{r} u_n = \frac{1}{2} \Delta u_{n-1}$$

Mit $u_n(r,\vartheta) = \frac{f_n^o(\vartheta)}{r^{n+1}} + \frac{1}{2a} \frac{f_n^1(\vartheta)}{r^n} + \ldots + (\frac{1}{2a})^n \frac{f_n^n(\vartheta)}{r}$

$$= \sum_{j=o}^{n} (\frac{1}{2a})^j \frac{f_n^j(\vartheta)}{r^{n-j+1}}$$ folgt für $f_n^j(\vartheta)$

die Rekursionsformel :

$$-2(n-j) f_n^j = \left[\frac{d^2}{d\vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta \frac{d}{d\vartheta} + (n-j)(n-j-1)\right] f_{n-1}^j \quad , \; j \leqq n-1$$

Für den Fall $j=n$ ist die Randbedingung anzuwenden.

Einsetzen von $f_n^j(\vartheta) = \sum_{\nu=o}^{\infty} C_{n,\nu}^j . P_\nu(\cos\vartheta)$ ergibt wegen (2) :

$$C_{n,\nu}^j = \frac{\nu(\nu+1) - (n-j)(n-j-1)}{2(n-j)} C_{n-1,\nu}^j \quad , \; j \leqq n-1 \qquad (25)$$

d.h: $C_{n,\nu}^j = I(n-j,\nu) . C_{j,\nu}^j$,wobei: $I(n-j,\nu) = \prod_{\mu=1}^{n-j} \frac{\nu(\nu+1) - \mu(\mu-1)}{2\mu}$

$C_{j,\nu}^j$ läßt sich durch die Randbedingung bestimmen.

Die Randbedingung :

Aus $(U_{einf.} + U_{refl.})_F = 0$ *) ; $U_{refl.} = e^{ik(r+2a)} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{i}{k})^n . u_n$

$(U_{einf.})_F = \frac{e^{ikR_o}}{R_o} = \frac{e^{ik(r_o+2a)}}{R_o}$ (vergl. Seite 2) folgt:

---

*) $(U)_F$ bedeutet : U auf der Fläche.

$(u_o)_F + \frac{1}{R_o} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{i}{k})^n (u_n)_F = 0$,was für alle k-Werte gilt.

Daraus folgt : a.) $(u_o)_F = -\frac{1}{R_o}$; b.) $(u_n)_F = 0$

Aus a.) folgt : $f_o^o(\vartheta) = -\frac{r_o}{R_o} = -\frac{1}{6}\frac{1}{\eta+\cos\vartheta}$, (26)

was wegen (15) ergibt :

$$f_o^o(\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{o,\nu}^o . P_\nu(\cos\vartheta) \; ; \; C_{o,\nu}^o = (-1)^{\nu+1}(2\nu+1)\frac{1-h^2}{2h} Q_\nu(\eta) \quad (27)$$

Aus b.) folgt: $\sum_{j=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\frac{1}{2a})^j C_{n,\nu}^j \frac{P_\nu(\cos\vartheta)}{r_o^{n-j+1}} = 0$

Mit $\frac{1}{r_o} = \frac{6}{2a}(h+\cos\vartheta)$ folgt :

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} 6^{n-j} C_{n,\nu}^j (h+\cos\vartheta)^{n-j} P_\nu(\cos\vartheta) = 0 \quad (28)$$

Für n=1 sind zwei Koeffizientenfolgen in(28) enthalten,nämlich: $C_{1,\nu}^o$ und $C_{1,\nu}^1$. Die erste Folge läßt sich gemäß (25) bestimmen, während die zweite noch zu bestimmen ist. Dies erfolgt dadurch, daß man die linke Seite von (28) als $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu P_\nu(\cos\vartheta)$ umschreibt, und $A_\nu = 0$ setzt(wegen der Orthogonalität von P_ν). Für n = 2 lassen sich dann $C_{2,\nu}^o$ und $C_{2,\nu}^1$ aus $C_{1,\nu}^o$ bzw. $C_{2,\nu}^1$ durch (25) ausrechnen,während $C_{2,\nu}^2$ sich aus (28) für n=2 ermitteln läßt. Also ist die Lösung für n auf die Lösung für n-1 zurüchzuführen.

Für $n > 2$ ist aber die Entwicklung der linken Seite von (28) sehr umständlich. Stattdessen läßt sich $C_{n,\nu}^n$ folgendermaßen ermitteln :

Multiplikation mit $6^k(h+\cos\vartheta)^k$, k=o,1,2,... und Integration über

$\xi = \cos\vartheta$ von -1 bis $+1$ ergibt wegen (12) :

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{\nu}^{n-j+k} . C_{n,\nu}^{j} = 0 \qquad (29)$$

Für $k=0,1,2,\ldots$,n fest stellt (29) ein lineares Gleichungssystem dar, dessen Unbekannte $C_{n,\nu}^{n}$ sind, nämlich :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{\nu}^{k} C_{n,\nu}^{n} = - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{\nu}^{n-j+k} C_{n,\nu}^{j}$$

Die linke Seite ist als gegeben zu betrachten, denn die $C_{n,\nu}^{j}$ für $j \leqq n-1$ lassen sich durch (25) und die Lösung für $n-1$ angeben.

Das Gleichungssystem (29) ist lösbar, denn Dank der Eigenschaft: $K_{\nu}^{k} = 0$ für $k \leqq \nu-1$ bricht die linke Seite ab, nämlich nach einem Glied für $k=0$,nach zwei Gliedern für $k=1$ usw. , was die Bestimmung von $C_{n,\nu}^{n}$ schrittweise ermöglicht.

Zusammengefaßt ist nach (25) und (29) :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} K_{\nu}^{n-j+k} . I(n-j,\nu) . C_{j,\nu}^{j} = 0; k=0,1,2,\ldots \qquad (29')$$

ein ineinander geschachteltes $C_{0,\nu}^{0}$

Gleichungssystem,dessen Lösung $C_{1,\nu}^{0}$ $C_{1,\nu}^{1}$

für n auf die Lösung für $n-1$ $C_{2,\nu}^{0}$ $C_{2,\nu}^{1}$ $C_{2,\nu}^{2}$

zurückzuführen ist ; $C_{j,\nu}^{j}$ ist .. ..

die Diagonalfolge des nebenstehenden Schemas.

§2. Die niedrigsten Koeffizienten

Nach (27) ist für n=o :

$$C^o_{o,o} = -\frac{1-h^2}{2h} Q_o(\eta)$$

$$C^o_{o,1} = 3\frac{1-h^2}{2h} Q_1(\eta)$$

$$C^o_{o,2} = -5\frac{1-h^2}{2h} Q_2(\eta) \qquad ; \eta = \frac{1+h^2}{2h}$$

Nach (12) ist :

$$K^o_o = 2 \qquad ; \qquad K^1_1 = \frac{2}{3}\sigma$$

$$K^1_o = 2\sigma h \qquad K^2_1 = \frac{4}{3}\sigma^2 h$$

$$K^2_o = \frac{2}{3}\sigma^2(1+3h^2) \qquad K^2_2 = \frac{4}{15}\sigma^2$$

; .....

Die Anwendung von (25) und (29) ergibt :

$$\underline{n=1} : \quad C^o_{1,o} = 0 \qquad C^1_{1,o} = -Q_1$$

$$C^o_{1,1} = 3\frac{1-h^2}{2h} Q_1 \qquad C^1_{1,1} = -3h Q_1 + 6 Q_2$$

$$C^o_{1,2} = -15\frac{1-h^2}{2h} Q_2 \qquad C^1_{1,2} = -2 Q_1 + 15 h Q_2 - 18 Q_3$$

$$\underline{n=2} : \quad C^o_{2,o} = 0 \qquad C^1_{2,o} = 0$$

$$C^o_{2,1} = 0 \qquad C^1_{2,1} = -3h Q_1 + 6 Q_2$$

$$C^o_{2,2} = -15\frac{1-h^2}{2h} Q_2 \qquad C^1_{2,2} = -6Q_1 + 45 h Q_2 - 54 Q_3$$

Und :

$$C^2_{2,o} = \frac{2h^2}{1-h^2} Q_1$$

$$C^2_{2,1} = \frac{2h}{1-h^2}\left[\left(\frac{12}{5} + 3h^2\right)Q_1 - 12 h Q_2 + \frac{18}{5} Q_3\right]$$

$$C^2_{2,2} = \frac{2h}{1-h^2}\left[8 h Q_1 - \left(\frac{135}{7} + 30 h^2\right)Q_2 + 72 h Q_3 - \frac{180}{7} Q_4\right]$$

§3. Die Abhängigkeit von h

Zu diesem Zweck ist $Q_\nu(\eta)$; $\eta = \frac{1+h^2}{2h}$ als $Q_\nu(h)$ darzustellen.

Dafür gibt es zwei Möglichkeiten :

a.) Aus (16) folgt :

$$Q_0(h) = \ln \frac{1+h}{1-h}$$

$$; Q_1(h) = \frac{1}{2}\left(h+\frac{1}{h}\right) \ln \frac{1+h}{1-h} - 1 \qquad (30)$$

; .....

Für höheres ν ist es einfacher die Rekursionsformel (7) anzuwenden

Diese Darstellung erlaubt es, eine beschränkte Zahl von $Q_\nu(h)$ exakt auszurechnen, während sie für großes ν nicht geeignet ist.

b.) Einsetzen von $\eta = \frac{1+h^2}{2h}$ in (17) ergibt :

$$Q_\nu(h) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{\nu k} \cdot h^k$$

Für $\nu = 0$ ist $g_{\nu k} = \begin{cases} \frac{2}{k} & \text{für } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}$

d.h: $Q_0(h) = 2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2\mu+1} h^{2\mu+1} = \ln \frac{1+h}{1-h}$, in Übereinstimmung mit Q_0 der Darstellung (30).

Einsetzen von $\nu = 1$; k=2,4,6,... in (18) ergibt :

$$Q_1(h) = 2\left[\frac{2}{1.3} h^2 + \frac{4}{3.5} h^4 + \frac{6}{5.7} h^6 + \ldots\right]$$

$$= 2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{2\mu+2}{(2\mu+1)(2\mu+3)} h^{2\mu+2} \quad ; \text{ allgemein :}$$

$$Q_\nu(h) = 2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(2\mu+2)(2\mu+4) \ldots (2\mu+2\nu)}{(2\mu+1)(2\mu+3)\ldots(2\mu+2\nu+1)} h^{2\mu+2\nu+1} \qquad (31)$$

Daraus sieht man, daß beide Darstellungen(30) und (31) für $\nu = 0,1$ übereinstimmen. Für höheres ν vermittelt dann die Rekursionsformel (7) die Übereinstimmung beider Darstellungen. Außerdem kann man feststellen, daß die negativen h-Potenzen der Darstellung (30) ausfallen, was mit (31) verträglich ist.

§4. Annäherung der Folge $g_m(\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{m} C^0_{0,\nu} P_\nu(\cos\vartheta)$ an $f^0_0(\vartheta)$

Zu diesem Zweck sind $Q_\nu(\eta)$ für $h=\frac{1}{2}$, $\nu \leqq 4, \nu=7$ nach (30); $C^0_{0,\nu}$ nach (27) und zum Vergleich die exakten $f^0_0(\vartheta)$ nach (26) ausgerechnet worden:

ϑ	g_0	g_1	g_2	g_4	g_7	f^0_0
0°	-o,824	+o,o16	-o,549	-o,4o3	-o,323	-o,333
15°	-o,824	-o,o13	-o,521	-o,38o	-o,336	-o,338
30°	-o,824	-o,o97	-o,45o	-o,343	-o,357	-o,354
45°	-o,824	-o,o23	-o,371	-o,352	-o,38o	-o,383
60°	-o,824	-o,o4o	-o,333	-o,426	-o,428	-o,428
75°	-o,824	-o,6o7	-o,381	-o,526	-o,5o2	-o,497
90°	-o,824	-o,824	-o,541	-o,614	-o,597	-o,6oo
105°	-o,824	-1,o41	-o,815	-o,726	-o,755	-o,757
120°	-o,824	-1,244	-1,173	-o,968	-1,oo3	-1,ooo
125°	-o,824	-1,3o9	-1,3o9	-1,1o1	-1,114	-1,115

Die Abbildung (1) zeigt die Annäherung der Folgen $g_0(\vartheta)$ bis $g_4(\vartheta)$ an $f^0_0(\vartheta)$. Die Abbildung (2) zeigt, daß schon $g_7(\vartheta)$ sich dem $f^0_0(\vartheta)$ gut annähert.

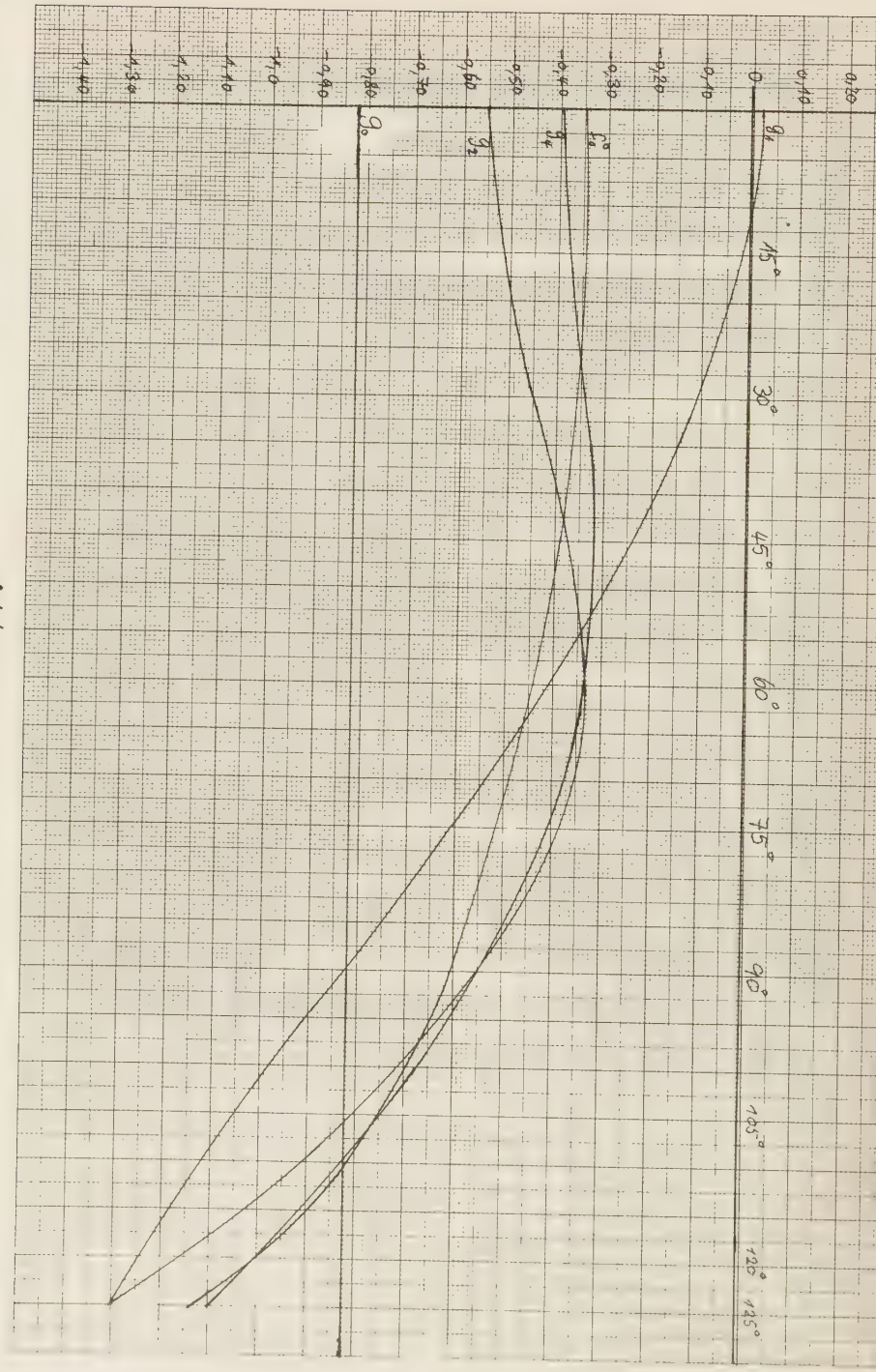

0,20
0,10
0
-0,10
-0,20
-0,30
-0,40
-0,50
-0,60
-0,70
-0,80
-0,90
-1,0
-1,10
-1,20
-1,30
-1,40
g_1
g_2
g_3
g_4
g_0
15°
30°
45°
60°
75°
90°
105°
120°
135°

Abb. (1)

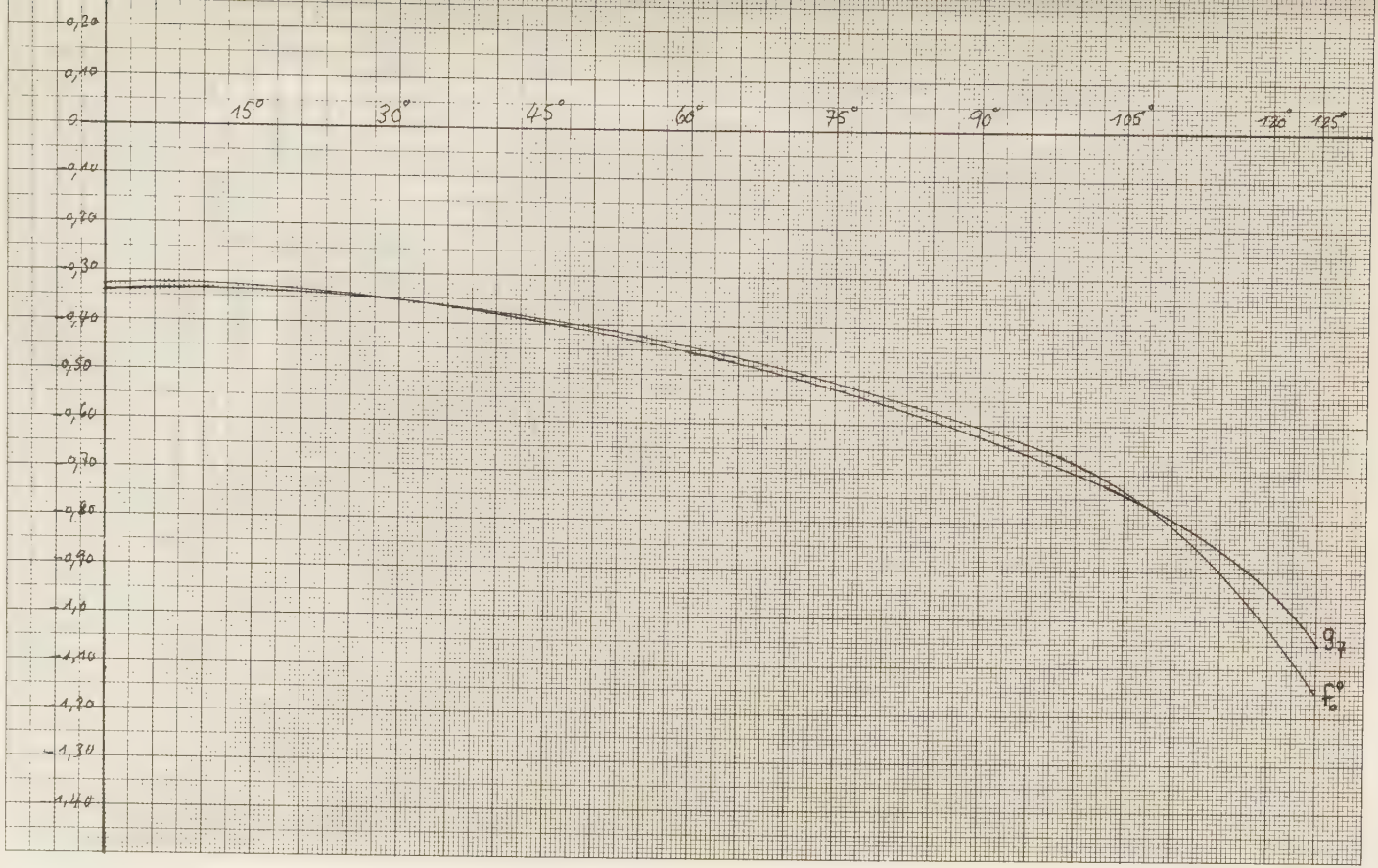

0,20
0,10
0
15°
30°
45°
60°
75°
90°
105°
120°
135°
-0,10
-0,20
-0,30
-0,40
-0,50
-0,60
-0,70
-0,80
-0,90
-1,0
-1,10
-1,20
-1,30
-1,40
g_σ
f_σ

Abb. (2)

§5. Regeln für $C^j_{n,\nu}$

Aus (25) sieht man, daß die $C^j_{n,\nu}$ mit wachsendem n (j,ν fest) stets anwächst. Die Folge bricht aber ab, nämlich für $\bar{n}=\nu+j+1$ und folglich ist auch $C^j_{n>\bar{n},\nu} = 0$ (32)

Also gibt es für jedes n-j-Paar ein $\nu^* = n-j-1$, sodaß :

$$C^j_{n,\nu^*} = 0 \tag{33}$$

Außerdem ist $C^j_{n,\nu<\nu^*} = 0$, denn wenn der Ausdruck

$\frac{\nu(\nu+1) - (n-j)(n-j-1)}{2(n-j)}$ für ν^*,n,j verschwindet, verschwindet er auch für $\nu^* -1,n-1,j$

d.h $C^j_{n-1,\nu^*-1} = 0$, was mit (32) ergibt :

$$C^j_{n,\nu^*-1} = 0 \tag{34}$$

Aus (33) und (34) folgt dann : $C^j_{n,\nu\leq n-j-1} = 0$

Also fängt die Folge $C^j_{n,\nu}$ (n,j fest) mit $C^j_{n,n-j}$ an (35)

§6. Verlauf der Koeffizienten $C^o_{n,\nu}$

Aus (25) folgt :

$$C^o_{n,\nu} = C^o_{o,\nu} \cdot \prod_{\mu=1}^{n} \frac{\nu(\nu+1) - \mu(\mu-1)}{2\mu} = \frac{C^o_{o,\nu}}{2^n.n!} \prod_{\mu=1}^{n} (\nu-\mu+1)(\nu+\mu)$$

$$= \frac{C^o_{o,\nu}}{2^n.n!} \cdot \frac{(\nu+n)!}{(\nu-n)!}$$

Nach (31) ist für $h \ll 1$:

$$Q_\nu(h) \approx 2\,\frac{2.4.6\ldots 2\nu}{3.5.7\ldots(2\nu+1)}\,h^{\nu+1} = 2\,\frac{2^{2\nu}.\nu!.\nu!}{(2\nu+1)!}\,h^{\nu+1}$$

Nach (27) ist : $C^o_{o,\nu} = (-1)^{\nu+1}(2\nu+1)\,\frac{1-h^2}{2h}\,Q_\nu(h)$

Daraus folgt :

$$\left|C^o_{n,\nu}\right| = \frac{2^{2\nu}.\nu!\,\nu!.(\nu+n)!}{2^n.(2\nu)!.(\nu-n)!}\,(1-h^2)\,h^\nu \qquad (36)$$

d.h $\ln\left|C^o_{n,\nu}\right| = q + \ln(\nu+n)! - \ln(\nu-n)! + 2\ln\nu!$

$$- \ln(2\nu)! + \nu.\ln(4h)\ , \qquad (37)$$

wobei q der von ν unabhängige Ausdruck: $q = \ln\frac{1-h^2}{2^n.n!}$ ist.

Nach (35) fängt die Folge $C^o_{n,\nu}$ mit $C^o_{n,n}$ an. Also ist $\nu \geqq n$ d.h $\nu - n > o$ zu betrachten.

Für großes n gilt die Näherungsformel :

$\ln n! \approx n \ln n - n$, was mit (37) ergibt :

$$\ln\left|C^o_{n,\nu}\right| = (q-2n) + (\nu+n)\ln(\nu+n) - (\nu-n)\ln(\nu-n) + \nu.\ln h$$

Dabei wurde vorausgesetzt, daß $\nu \gg n$, damit die Näherungsformel für $\ln(\nu-n)!$ benutzt werden kann.

Daraus folgt: $\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\left|C^o_{n,\nu}\right| = \ln(\frac{\nu+n}{\nu-n}.h)$

Damit ist:

$$\frac{\nu_{max.} + n}{\nu_{max.} - n}\,h = 1, \text{oder } \nu_{max.} = \frac{n(1+h)}{1-h} \qquad (38)$$

Wobei $\nu_{max.}$ dasjenige ν bedeutet, bei welchem $\left|C^o_{n,\nu}\right|$ ein Maximum hat.

Einsetzen von $\nu_{max.}$ in (36) und Anwendung der Näherungsformel: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n$ ergibt :

$$\left|C^o_{n,\nu}\right|_{max.} \approx 2^{n+1/2}.(\tfrac{n}{e})^n\,(1-h^2)\left[\frac{h}{(1-h)^2}\right]^n \qquad (39)$$

Aus (39) sieht man, wie stark $\left|C^o_{n,\nu}\right|_{max.}$ von h abhängt, besonders von dem Ausdruck: $\frac{h}{(1-h)^2}$ .Das Anwachsen von $C^o_{n,\nu}$ wird gedämpft oder verstärkt,je nachdem : $\frac{h}{(1-h)^2} \lessgtr 1$ ist, d.h. je nachdem $h \lessgtr o,38$

Erheblich besser konvergiert der Ausdruck $k^{-n}\left|C^o_{n,\nu}\right|_{max.}$ (was sich aus $U = \sum_{n=o}^{\infty}(\frac{i}{k})^n.u_n$ ergibt) für großes k. Während $\left|C^o_{n,\nu}\right|_{max.}$ schon den Wert $2,17.10^{15}$ für n=20 und $h=\frac{1}{2}$ hat,erreicht $k^{-n}\left|C^o_{n,\nu}\right|_{max}$ den Wert 1 erst für n = 200 000 ,wenn $k = 10^4$ eingesetzt wird. Jedoch bleibt auch $k^{-n}\left|C^o_{n,\nu}\right|$ semikonvergent,was zu erwarten war.

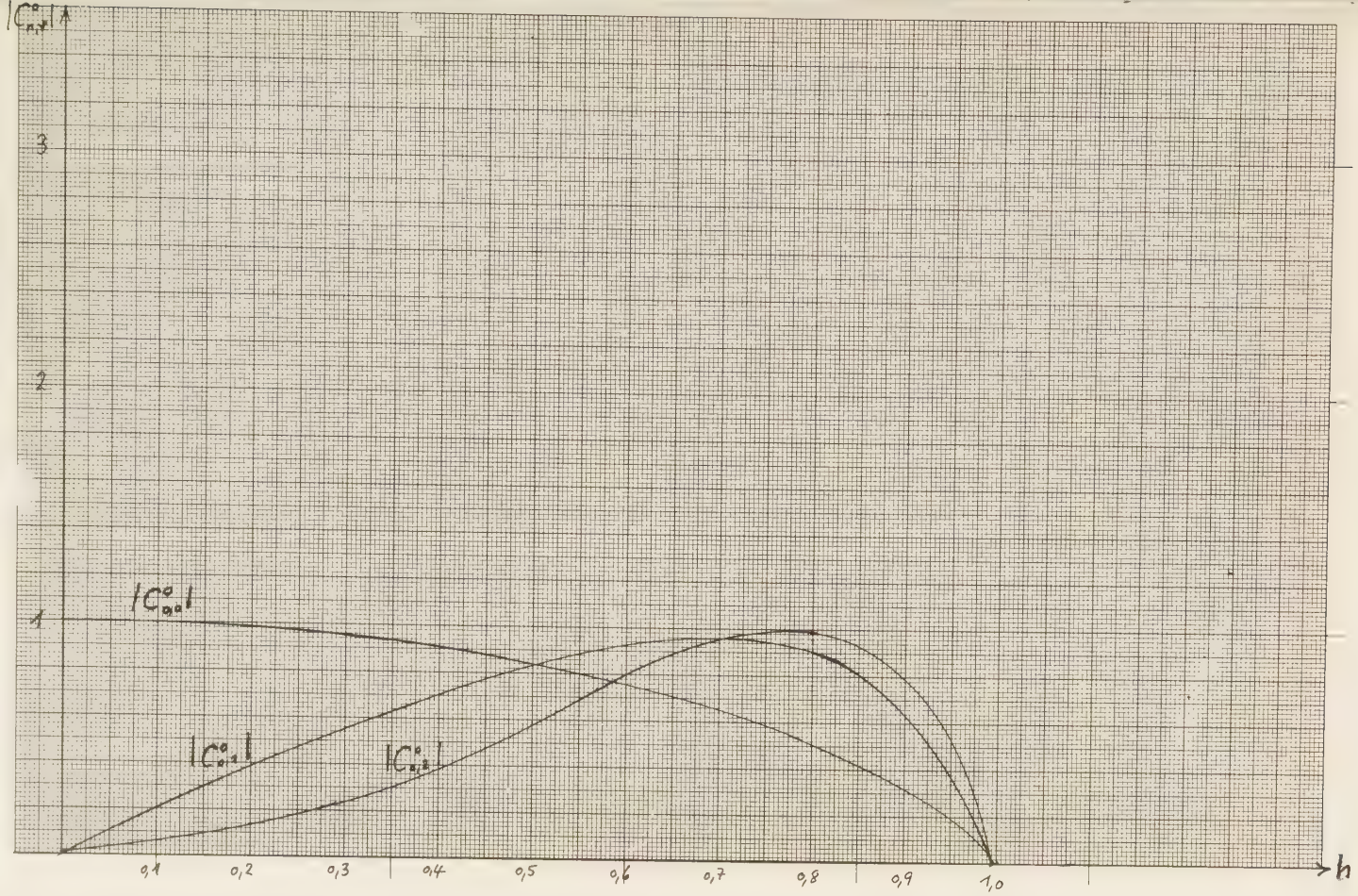
Im Folgenden ist die h-Abhängigkeit der niedrigsten $C^o_{n,\nu}$ $(n,\nu \leqq 2)$ numerisch und graphisch dargestellt.

h	=0	o,1	o,2	o,3	o,4	o,5	o,6	o,7	o,8	o,9	1
$\left\|C^o_{o,o}\right\|$	=1	o,99	o,97	o,93	o,89	o,84	o,74	o,62	o,51	o,31	0
$\left\|C^o_{o,1}\right\|$	=1	o,19	o,37	o,54	o,72	o,84	o,90	o,95	o,87	o,62	0
$\left\|C^o_{o,2}\right\|$	=0	o,03	o,14	o,22	o,40	o,58	o,72	o,91	o,97	o,79	0

Zudem ist :

$C^o_{1,o} = C^o_{2,o} = C^o_{2,1} = 0$; $C^o_{1,1} = C^o_{o,1} = C^o_{2,2} = C^o_{o,2}$,

was sich aus (25) ergibt.


$|C^o_{n,r}|$
3
2
1
$|C^o_{0,0}|$
$|C^o_{0,1}|$
$|C^o_{0,2}|$
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
h

§7. Die unmittelbare Lösung

Bei der früheren Lösung wurde für $U(r,\vartheta)$ der Ansatz gemacht :

$$U = e^{ik(r+2a)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{k}\right)^n . u_n$$

Unter der unmittelbaren Lösung verstehen wir, $U(r,\vartheta)$ als Linearkombination der bekannten Partikulärlösungen der Wellengleichung $\Delta U + k^2 U = 0$ darzustellen.

Wegen der Symmetrie um die z-Achse(d.h. Unabhängigkeit der Lösung vom Azimutwinkel φ), hat die Partikulärlösung der Wellengleichung die Form :

$$u_n(r,\vartheta) = \text{const.} \frac{1}{(kr)^{1/2}} . H^{(1)}_{n+1/2}(kr) . P^o_n(\cos\vartheta), \qquad (40)$$

wobei $H^{(1)}_{n+1/2}(kr)$ die Hankelsche Funktion 1.Ordnung ist.

Wegen $\lim_{\varrho\to\infty} H^{(1)}_{n+1/2}(\varrho) = \text{const.} \frac{e^{i\varrho}}{\sqrt{\varrho}}$; $\varrho = kr$, kann man den Ansatz machen :

$H^{(1)}_{n+1/2}(\varrho) = \varrho^{-1/2} . \varphi_n(\varrho) . e^{i\varrho}$, wobei $\varphi_n(\varrho)$ eine fallende Potenzreihe von ϱ ist.

Einsetzen in die Besselsche Differentialgleichung :

$\left[\frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho} + 1 - \frac{(n+1/2)^2}{\varrho^2}\right] H^{(1)}_{n+1/2}(\varrho) = 0$ ergibt für $\varphi_n(\varrho)$ die Differentialgleichung :

$$\left[\frac{d^2}{d\varrho^2} + 2i\frac{d}{d\varrho} - \frac{n(n+1)}{\varrho^2}\right] \varphi_n(\varrho) = 0$$

Einsetzen von $\varphi_n(\varrho) = \sum_{p=o}^{\infty} \frac{c_{np}}{\varrho^p}$ und Koeffizientenvergleich ergibt :

$$\varphi_n(kr) = \sum_{p=o}^{n} \frac{c_{np}}{(kr)^p} \quad ; \quad c_{np} = i^p . c_{no} . \prod_{\mu=1}^{p} \frac{n(n+1) - \mu(\mu-1)}{2\mu}$$

Dabei bleibt c_{no} willkürlich,und kann deshalb auf 1 normiert werden. Also ist :

$$c_{np} = I(p,n) . i^p \quad \text{(vergl. (25))} \quad ; \quad c_{no} = 1 \qquad (41)$$

Aus (40) folgt : $u_n(r,\vartheta) \sim \frac{e^{ikr}}{r}\,\varphi_n(kr).P_n(\cos\vartheta)$

d.h. $U_{refl.}(r,\vartheta) = \frac{e^{ik(r+2a)}}{r}\sum_{n=o}^{\infty} S_n.\,\varphi_n(kr).P_n(\cos\vartheta)$

Mit diesem Ansatz ist eine Phasendifferenz: e^{2ika}, die bei der Reflexion auftritt, ausgedrückt worden.

Die Randbedingung :

Aus $(U_{refl.}+U_{einf.})_F = 0$; $(U_{einf.})_F = \frac{e^{ikR_o}}{R_o} = \frac{e^{ik(r_o+2a)}}{R_o}$ folgt:

$$\sum_{n=o}^{\infty} S_n.P_n(\cos\vartheta)\sum_{p=o}^{n}\frac{c_{np}}{(kr_o)^p} + \frac{r_o}{R_o} = 0$$

Mit (26) und mit $\frac{1}{r_o} = \frac{\sigma}{2a}(h+\cos\vartheta)$ folgt :

$$\sum_{n=o}^{\infty} S_n\,P_n(\cos\vartheta)\sum_{p=o}^{n} c_{np}\,(\frac{\sigma}{2ka})^p(h+\cos\vartheta)^p - \sum_{n=o}^{\infty} C^o_{o,n}\,P_n(\cos\vartheta) = 0$$

Weil $U_{einf.}$ die Dimension $[r]^{-1}$ hat, muß S_n dimensionslos sein. Außerdem muß S_n die charakteristische Größe der einfallenden Welle (d.h. die Wellenzahl k) bzw. der reflektierenden Fläche enthalten. Damit ist: $S_n = \sum_{q=o}^{\infty}\frac{S_{nq}}{(2ka)^q}$ und die Randbedingung lautet:

$$\left[S_{oo}+\frac{S_{o1}}{2ka}+\frac{S_{o2}}{(2ka)^2}+\ldots\right]c_{oo}.P_o$$

$$+\left[S_{1o}+\frac{S_{11}}{2ka}+\frac{S_{12}}{(2ka)^2}+\ldots\right]\left[c_{1o}+c_{11}.\frac{\sigma}{2ka}(h+\cos\vartheta)\right]P_1$$

$$+\left[S_{2o}+\frac{S_{21}}{2ka}+\frac{S_{22}}{(2ka)^2}+\ldots\right]\left[c_{2o}+c_{21}\frac{\sigma}{2ka}(h+\cos\vartheta)+c_{22}(\frac{\sigma}{2ka})^2(h+\cos\vartheta)^2\right]P_2$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ -\sum_{n=o}^{\infty} C^o_{o,n}\,P_n = 0$$

Diese Beziehung gilt unabhängig davon, welchen Wert die Wellenzahl k hat. Also müssen die Koeffizienten von k^{-p}, p=o,1,2,... einzeln verschwinden.

Aus dem Verschwinden des Koeffizienten von k^o folgt :

$$\sum_{n=o}^{\infty} S_{no}.c_{no}.P_n(\cos\vartheta) - \sum_{n=o}^{\infty} C^o_{o,n}.P_n(\cos\vartheta) = 0$$

Mit $c_{no} = 1$ (vergl. (41)) folgt :

$$S_{no} = C^{o}_{o,n} \tag{42}$$

Aus dem Verschwinden des Koeffizienten von k^{-p} folgt :

$$\sum_{n=o}^{\infty} P_n(\cos\vartheta)\left[\sum_{j=o}^{p} S_{nj}\cdot c_{n,p-j}\cdot(h+\cos\vartheta)^{p-j}\right] = 0$$

Multiplikation mit $\sigma^{k}(h+\cos\vartheta)^{k}$ und Integration über $\xi=\cos\vartheta$ von -1 bis $+1$ liefert das lineare Gleichungssystem :

$$\sum_{n=o}^{\infty}\sum_{j=o}^{p} S_{nj}\cdot c_{n,p-j}\cdot K_n^{p-j+k} = 0 \; ; \; k = o,1,2,\ldots \; , \tag{43}$$

mit den durch (12) gegebenen K .

Die Formel (29) , mit anderen Indices geschrieben, lautet :

$$\sum_{n=o}^{\infty}\sum_{j=o}^{p} C^{j}_{p,n}\cdot K_n^{p-j+k} = 0 \tag{44}$$

Aus (43)und(44) sieht man, daß $S_{nj}\cdot c_{n,p-j}$ und $C^{j}_{p,n}$ dasselbe lineare Gleichungssystem lösen. Daraus folgt :

$$S_{nj}\cdot c_{n,p-j} = ß.C^{j}_{p,n} \; , \tag{45}$$

wobei ß ein Zahlenfaktor und $C^{j}_{p,n}$ die Koeffizienten der früheren Lösung sind.

Nach (41) ist : $c_{n,p-j} = i^{p-j}.I(p-j,n)$

Nach (25) ist : $C^{j}_{p,n} = I(p-j,n).C^{j}_{j,n}$

Einsetzen in (45) ergibt :

$$S_{nj} = ß.i^{j-p}.C^{j}_{j,n} \tag{46}$$

Der Zahlenfaktor ß kann nur von p abhängig sein,denn n,j sind Laufindices bei der Summation. Außerdem kann (46) einen Faktor λ enthalten, der von den charakteristischen Indices der Beziehung,d.h von n,j abhängt. Also muß $ß(p).i^{j-p} = \lambda(n,j)$ sein. Die einzige Möglichkeit dafür ist : $ß(p) = c.i^{p}$

Wegen (42) ist $c = 1$, damit ist :

$$S_{nj} = i^{j}.C^{j}_{j,n} \tag{47}$$

§8. Vergleich mit der früheren Lösung

Aus $U_{refl.} = \frac{e^{ik(r+2a)}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} S_n \varphi_n(kr)\, P_n(\cos\vartheta)$

; $\varphi_n(kr) = \sum_{p=0}^{n} \frac{c_{np}}{(kr)^p}$; $S_n = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{S_{nq}}{(2ka)^q}$ folgt :

$U = e^{ik(r+2a)} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{i}{k})^n . u_n(r,\vartheta)$, wobei :

$u_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_{n\nu}(r).P_\nu(\cos\vartheta)$; $F_{n\nu}(r) = i^{-n} \sum_{j=0}^{n} (\frac{1}{2a})^j \frac{S_{\nu j}.c_{\nu,n-j}}{r^{n-j+1}}$

Aus (25) , (41) , (47) folgt :

$$i^{-n}.S_{\nu j}.c_{\nu,n-j} = I(n-j,\nu).C^j_{j,\nu} = C^j_{n,\nu}$$

Einsetzen in u_n ergibt :

$$u_n(r,\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} (\frac{1}{2a})^j \frac{C^j_{n,\nu}.P_\nu(\cos\vartheta)}{r^{n-j+1}}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (\frac{1}{2a})^j \frac{f^j_n(\vartheta)}{r^{n-j+1}} \quad , \text{ wobei :}$$

$f^j_n(\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C^j_{n,\nu}.P_\nu(\cos\vartheta)$, in Übereinstimmung mit der früheren Lösung.

II. DIE LÖSUNG FÜR DIE ELEKTROMAGNETISCHE WELLE

A.) Hyperboloid - Dipol in der Symmetrieachse

§1. Entwicklung nach Kugelfunktionen

Wegen der Symmetrie um die z-Achse ist die r- bzw. die ϑ-Komponente der reflektierten elektrischen Feldstärke vom Azimutwinkel φ unabhängig und die φ-Komponente $\equiv 0$

In[6] wurde auf Grund einer geometrisch-optischen Überlegung für die Lösung der Wellengleichung $\Delta\mathfrak{E} + k^2\mathfrak{E} = 0$; $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$ der Ansatz gemacht :

$$\mathfrak{E} = e^{ik(r+2a)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{k}\right)^n \cdot \mathfrak{E}_n$$

Dieser Ansatz lieferte für $\mathfrak{E}_n$ die Beziehung :

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_n}{\partial r} + \frac{1}{r}\mathfrak{E}_n = \frac{1}{2}\nabla^2 \mathfrak{E}_{n-1} \quad ; \quad \mathfrak{E}_{rn} = \nabla \mathfrak{E}_{n-1} \tag{48}$$

Mit $\mathfrak{E}_{rn} = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2a}\right)^j \frac{f_n^j(\vartheta)}{r^{n-j+1}}$; $\mathfrak{E}_{\vartheta n} = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2a}\right)^j \frac{g_n^j(\vartheta)}{r^{n-j+1}}$ ist :

$$\operatorname{div}\mathfrak{E}_n = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2a}\right)^j \frac{1}{r^{n-j+2}} \left[\left(\frac{d}{d\vartheta} + \operatorname{cotg}\vartheta\right) g_n^j - (n-j-1) f_n^j\right]$$

$$; \quad (\nabla^2 \mathfrak{E}_n)_\vartheta = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2a}\right)^j \frac{1}{r^{n-j+3}} \left[\left\{\frac{d^2}{d\vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta \frac{d}{d\vartheta} - \frac{1}{\sin^2\vartheta} + (n-j)(n-j+1)\right\} g_n^j + 2\frac{d f_n^j}{d\vartheta}\right]$$

$$; \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_{\vartheta n}}{\partial r} + \frac{1}{r}\mathfrak{E}_{\vartheta n} = -\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2a}\right)^j \frac{n-j}{r^{n-j+2}} g_n^j$$

Einsetzen in (48) ergibt die Rekursionsformeln :

$$-2(n-j)g_n^j = \left[\frac{d^2}{d\vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta \frac{d}{d\vartheta} - \frac{1}{\sin^2\vartheta} + (n-j)(n-j-1)\right] g_{n-1}^j + 2\frac{d f_{n-1}^j}{d\vartheta} \tag{49}$$

$$; \quad f_n^j = \left(\frac{d}{d\vartheta} + \operatorname{cotg}\vartheta\right) g_{n-1}^j - (n-j-2) f_{n-1}^j \tag{50}$$

Aus (2) und (49) sieht man, daß $g_n^j(\vartheta)$ sich nach $P_\nu^1(\cos\vartheta)$ entwickeln läßt, falls $\frac{d f_n^j(\vartheta)}{d\vartheta}$ sich nach derselben Kugelfunktion entwickeln läßt. In diesem Fall soll $f_n^j(\vartheta)$ sich nach $P_\nu^0(\cos\vartheta)$ entwickeln lassen, denn nach (4) ist $\frac{d P_\nu^0}{d\vartheta} = -P_\nu^1$

Diese Annahme, d.h $f_n^j(\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{n,\nu}^j P_\nu^0(\cos\vartheta)$

$$; \quad g_n^j(\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_{n,\nu}^j P_\nu^1(\cos\vartheta) \tag{51}$$

wird gerechtfertigt, wenn sie auch mit (50) in Einklang steht, d.h wenn $(\frac{d}{d\vartheta} + \cot g\vartheta) g_n^j$ sich nach $P_\nu^0(\cos\vartheta)$ entwickeln läßt. Dies ist tatsächlich der Fall, denn nach (2) und (4) ist :

$$(\frac{d}{d\vartheta} + \cot g\vartheta) P_\nu^1 = -(\frac{d}{d\vartheta} + \cot g\vartheta)\frac{d P_\nu^0}{d\vartheta} = -(\frac{d^2}{d\vartheta^2} + \cot g\vartheta \frac{d}{d\vartheta}) P_\nu^0$$

$$= \nu(\nu+1) P_\nu^0 \tag{52}$$

Einsetzen von (51) in (49) , (50) ergibt wegen (2) und (52) :

$$-2(n-j) D_{n,\nu}^j = \left[(n-j)(n-j-1) - \nu(\nu+1)\right] D_{n-1,\nu}^j - 2\, C_{n-1,\nu}^j \tag{53}$$

$$; \quad C_{n,\nu}^j = \nu(\nu+1)\, D_{n-1,\nu}^j - (n-j-2)\, C_{n-1,\nu}^j \tag{54}$$

Eliminieren von C bzw. D aus (53) , (54) ergibt :

$$2(n-j-1)\, C_{n,\nu}^j - \left[\nu(\nu+1) - 3(n-j-1)(n-j-2)\right] C_{n-1,\nu}^j$$

$$-(n-j-1)\left[\nu(\nu+1) - (n-j-2)(n-j-3)\right] C_{n-2,\nu}^j = 0 \tag{55}$$

$$; \; 2(n-j)\, D_{n,\nu}^j - \left[\nu(\nu+1) - 3(n-j-1)(n-j-2)\right] D_{n-1,\nu}^j$$

$$-(n-j-1)\left[\nu(\nu+1) - (n-j-2)(n-j-3)\right] D_{n-2,\nu}^j = 0 \tag{56}$$

Bei der skalaren Welle galt für die Koeffizienten die zweigliedrige Rekursionsformel (25). Es liegt hier die Vermutung nahe, ob eine der dreigliedrigen Rekursionsformeln (55) oder (56) einer zweigliedrigen Formel äquivalent ist. In diesem Fall müßte die dreigliedrige Formel sich als Linearkombination einer und derselben zweigliedrigen Formel für n bzw. n-1 darstellen. Denn aus $C_{n,\nu}^j = s(n,j,\nu) C_{n-1,\nu}^j$; $C_{n-1,\nu}^j = s(n-1,j,\nu) C_{n-2,\nu}^j$ folgt durch Multiplikation der ersten mit $t(n,j,\nu)$ und Addition zur zweiten :

$$C_{n,\nu}^j - \left[s(n,j,\nu) - t(n,j,\nu)\right] C_{n-1,\nu}^j - s(n,j,\nu).t(n-1,j,\nu) C_{n-2,\nu}^j = 0$$

Umgekehrt läßt sich eine dreigliedrige Rekursionsformel in eine zweigliedrige Formel umwandeln, wenn sie sich auf die vorige Form bringen läßt.

Für (55) existiert tatsächlich ein solches $s(n,j,\nu)$ bzw. $t(n,j,\nu)$, nämlich: $s(n,j,\nu) = n-j-2$; $t(n,j,\nu) = \frac{\nu(\nu+1) - (n-j-1)(n-j-2)}{2(n-j-1)}$

d.h $C^j_{n,\nu} = \frac{\nu(\nu+1) - (n-j-1)(n-j-2)}{2(n-j-1)} C^j_{n-1,\nu}$

oder $C^j_{n,\nu} = C^j_{j+1,\nu} \cdot \prod_{\mu=1}^{n-j-1} \frac{\nu(\nu+1) - \mu(\mu-1)}{2\mu}$

$$= I(n-j-1,\nu)\, C^j_{j+1,\nu} \quad \text{(vergl.(25))} \qquad (57)$$

Daß die Rekursionsformel mit $C^j_{j+1,\nu}$ und nicht mit $C^j_{j,\nu}$ anfängt, liegt daran, daß $f^j_j(\vartheta) \equiv 0$ ist. Denn nach :

$$\mathfrak{f}^{n-1}_{r} = \sum_{j=0}^{n-1} (\tfrac{1}{2a})^j \frac{f^j_{n-1}}{r^{n-j}} \quad ; \quad \mathfrak{f}^{n-1}_{\vartheta} = \sum_{j=0}^{n-1} (\tfrac{1}{2a})^j \frac{g^j_{n-1}}{r^{n-j}}$$

; $\mathfrak{f}^n_r = \operatorname{div} \mathfrak{f}^{n-1}$ hat $\mathfrak{f}^n_r$ die Form :

$$\mathfrak{f}^n_r = \sum_{j=0}^{n-1} (\tfrac{1}{2a})^j \frac{f^j_n}{r^{n-j+1}}$$, also fehlt das letzte Glied mit f^n_n .

Aus (54) und (57) folgt :

$$\nu(\nu+1)\, D^j_{n,\nu} = I(n-j,\nu)\, C^j_{j+1,\nu} + (n-j-1).I(n-j-1,\nu)\, C^j_{j+1,\nu}$$

$$= \frac{\nu(\nu+1) + (n-j)(n-j-1)}{2(n-j)} I(n-j-1,\nu).C^j_{j+1,\nu} \qquad (58)$$

Wegen $C^j_{j,\nu} = 0$ folgt aus (54) für $n = j+1$:

$\nu(\nu+1)\, D^j_{j,\nu} = C^j_{j+1,\nu}$, was mit (58) ergibt :

$$D^j_{n,\nu} = \frac{\nu(\nu+1) + (n-j)(n-j-1)}{2(n-j)} I(n-j-1,\nu).D^j_{j,\nu} \qquad (59)$$

Die einfallende Welle :

Die elektrische Feldstärke dieser Dipolorientierung(Dipol in der Symmetrieachse)läßt sich aus $\mathfrak{f} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\frac{e^{ikR}}{R}\mathfrak{k})$ ableiten, wobei $\mathfrak{k}$ der Einheitsvektor der z-Richtung ist.

In diesem Fall hat $(\mathcal{L}_{einf.})_F$ die Form :

$$(\mathcal{L}_{einf.})_F = e^{ik(r_o+2a)} \sum_{n=o}^{2} (\frac{i}{k})^n . (\mathcal{L}^n_{einf.})_F \quad , \text{ wobei :}$$

$$(\mathcal{L}^o_r)_F = -\frac{1}{4h^3}\frac{1}{r_o}\left[(1-h^2)^2(\frac{r_o}{R_o})^3 -(3-2h^2-h^4)(\frac{r_o}{R_o})^2+(3-2h^2-h^4)\frac{r_o}{R_o}-(1-h^2)^2\right]$$

$$(\mathcal{L}^1_r)_F = \frac{1}{4h^3}\frac{1}{r_o^2}\left[3(1-h^2)^2(\frac{r_o}{R_o})^4-3(3-2h^2-h^4)(\frac{r_o}{R_o})^3+(9-2h^2+h^4)(\frac{r_o}{R_o})^2 -(3-2h^2-h^4)\frac{r_o}{R_o}\right]$$

$$(\mathcal{L}^2_r)_F = \frac{1}{4h^3}\frac{1}{r_o^3}\left[3(1-h^2)^2(\frac{r_o}{R_o})^5-3(3-2h^2-h^4)(\frac{r_o}{R_o})^4+(9-2h^2+h^4)(\frac{r_o}{R_o})^3 -(3-2h^2-h^4)(\frac{r_o}{R_o})^2\right]$$

$$(\mathcal{L}^o_\vartheta)_F = \frac{1}{2h^2}\frac{1}{r_o}\left[(1-h^2)(\frac{r_o}{R_o})^3-2(\frac{r_o}{R_o})^2+(1-h^2)\frac{r_o}{R_o}\right]\sin\vartheta \qquad (60)$$

$$(\mathcal{L}^1_\vartheta)_F = -\frac{1}{2h^2}\frac{1}{r_o^2}\left[3(1-h^2)(\frac{r_o}{R_o})^4 - 6(\frac{r_o}{R_o})^3 + (3+h^2)(\frac{r_o}{R_o})^2\right]\sin\vartheta$$

$$(\mathcal{L}^2_\vartheta)_F = -\frac{1}{2h^2}\frac{1}{r_o^3}\left[3(1-h^2)(\frac{r_o}{R_o})^5 - 6(\frac{r_o}{R_o})^4 + (3+h^2)(\frac{r_o}{R_o})^3\right]\sin\vartheta$$

Die Entwicklung von $(\mathcal{L}_{einf.})_F$ nach Kugelfunktionen erfordert die Entwicklung von $(\frac{r_o}{R_o})^n$ bzw. $(\frac{r_o}{R_o})^n\sin\vartheta$ für $n \leqq 5$.

Die Entwicklung von $\frac{r_o}{R_o}$ ist schon durch (26) gegeben, während $(\frac{r_o}{R_o})^n\sin\vartheta$ und $(\frac{r_o}{R_o})^n$ für $2 \leqq n \leqq 5$ noch zu entwickeln sind.

Differentiation von (15) nach η und Multiplikation mit (η^2-1) ergibt :

$$-(\eta^2-1)\frac{1}{(\eta+\cos\vartheta)^2} = \sum_{\nu=o}^{\infty}(-1)^\nu(2\nu+1)(\eta^2-1)\frac{d\,Q_\nu}{d\eta}P_\nu(\cos\vartheta) \quad , \text{ was}$$

mit (5) und $\eta = \frac{1+h^2}{2h}$ ergibt :

$$-(\frac{1-h^2}{2h})^2\frac{1}{(\eta+\cos\vartheta)^2} = \sum_{\nu=o}^{\infty}(-1)^\nu\nu(\nu+1)(Q_{\nu+1}-Q_{\nu-1})P_\nu(\cos\vartheta) \qquad (61)$$

Mit $\frac{r_o}{R_o} = \frac{1-h^2}{2h}\frac{1}{\eta+\cos\vartheta}$ (vergl. Seite 2) liefert (61) die Entwicklung von $(\frac{r_o}{R_o})^2$ nach $P^o_\nu(\cos\vartheta)$

Durch Wiederholung der Differentiation von (61) nach η und mit Hilfe der Formel (6) folgt: $(\frac{r}{R_o})^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} A^n_\nu . P_\nu(\cos\vartheta)$, wobei :

$$A^1_\nu = (-1)^\nu (2\nu+1)\frac{1-h^2}{2h} Q_\nu \; ; \quad A^2_\nu = (-1)^{\nu+1}(\nu+1)(Q_{\nu+1} - Q_{\nu-1})$$

$$A^3_\nu = (-1)^\nu \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{2} \frac{1-h^2}{2h} Q_\nu ; \quad A^4_\nu = (-1)^{\nu+1} \frac{\nu^2(\nu+1)^2}{6}(Q_{\nu+1} - Q_{\nu-1})$$

$$A^5_\nu = (-1)^\nu \frac{\nu^2(\nu+1)^2(2\nu+1)}{24} \frac{1-h^2}{2h} Q_\nu$$

Differentiation von $(\frac{r_o}{R_o})^n$ nach ϑ und Einsetzen von $\frac{d P^o_\nu}{d\vartheta} = - P^1_\nu$

ergibt : $(\frac{r_o}{R_o})^n \sin\vartheta = \sum_{\nu=0}^{\infty} B^n_\nu . P^1_\nu(\cos\vartheta)$, wobei $n \geq 2$ und :

$$B^2_\nu = - \frac{1-h^2}{2h} A^1_\nu \qquad ; \qquad B^3_\nu = - \frac{1}{2} \frac{1-h^2}{2h} A^2_\nu$$

$$B^4_\nu = - \frac{1}{3} \frac{1-h^2}{2h} A^3_\nu \qquad ; \qquad B^5_\nu = - \frac{1}{4} \frac{1-h^2}{2h} A^4_\nu$$

B^1_ν läßt sich folgendermaßen ermitteln :

Aus $\frac{r_o}{R_o} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A^1_\nu . P^o_\nu(\cos\vartheta)$ folgt $\frac{r_o}{R_o}\sin\vartheta = \sum_{\nu=0}^{\infty} A^1_\nu \sin\vartheta P^o_\nu(\cos\vartheta)$,

was mit (19) ergibt : $\frac{r_o}{R_o}\sin\vartheta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A^1_\nu}{2\nu+1} (P^1_{\nu+1} - P^1_{\nu-1})$

Also ist $\frac{r_o}{R_o}\sin\vartheta = \sum_{\nu=1}^{\infty} B^1_\nu . P^1_\nu(\cos\vartheta)$, wobei: $B^1_\nu = \frac{A^1_{\nu-1}}{2\nu-1} - \frac{A^1_{\nu+1}}{2\nu+3}$

Einsetzen in (60) ergibt :

$$(\mathfrak{f}^n_\nu)_F = - \frac{1}{r_o^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} C^*_{n,\nu} P^o_\nu(\cos\vartheta) \; ; \; (\mathfrak{f}^n_\vartheta)_F = - \frac{1}{r_o^{n+1}} \sum_{\nu=1}^{\infty} D^*_{n,\nu} P^1_\nu(\cos\vartheta),$$

wobei :

$$C^*_{o,\nu} = \frac{1}{4h^3}\left[(1-h^2)^2 A^3_\nu - (3-2h^2-h^4)A^2_\nu + (3-2h^2-h^4)A^1_\nu\right]$$

$$C^*_{1,\nu} = - \frac{1}{4h^3}\left[3(1-h^2)^2 A^4_\nu - 3(3-2h^2-h^4)A^3_\nu + (9-2h^2+h^4)A^2_\nu \right.$$
$$\left. - (3-2h^2-h^4)A^1_\nu \right]$$

$$C^*_{2,\nu} = - \frac{1}{4h^3}\left[3(1-h^2)^2 A^5_\nu - 3(3-2h^2-h^4)A^4_\nu + (9-2h^2+h^4)A^3_\nu \right.$$
$$\left. - (3-2h^2-h^4)A^2_\nu \right]$$

Allerdings ist wegen des von $\frac{r_o}{R_o}$ freien Glieds in $\mathfrak{f}^o_\nu$:

$$C^{*}_{0,0} = \frac{1}{4h^3}\left[(1-h^2)^2A_0^3 - 3(3-2h^2-h^4)A_0^2 + (3-2h^2-h^4)A_0^1 - (1-h^2)\right]$$

$$; \quad D^{*}_{0,\nu} = -\frac{1}{2h^2}\left[(1-h^2)B_\nu^3 - 2B_\nu^2 + (1-h^2)B_\nu^1\right] \qquad (62)$$

$$D^{*}_{1,\nu} = \frac{1}{2h^2}\left[3(1-h^2)B_\nu^4 - 6B_\nu^3 + (3+h^2)B_\nu^2\right]$$

$$D^{*}_{2,\nu} = \frac{1}{2h^2}\left[3(1-h^2)B_\nu^5 - 6B_\nu^4 + (3+h^2)B_\nu^3\right]$$

Die Randbedingung : Aus $w_r(\zeta)_F = 0$; $\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{i}{k})^n \zeta_n$ folgt :

$$w_r(\zeta^n_{\text{einf.}} + \zeta^n_{\text{refl.}})_F = w_{\vartheta}(\zeta^n_{\text{einf.}} + \zeta^n_{\text{refl.}})_F \quad , \text{ was mit}$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{2h(\eta+\cos\vartheta)}}\left[(h+\cos\vartheta)\vec{r} + \sin\vartheta\,\vec{\vartheta}\right] \quad \text{ergibt :}$$

$$(h+\cos\vartheta)\sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu^1\left[\sum_{j=0}^{n}(\frac{1}{2a})^j \frac{D^j_{n,\nu}}{r_o^{n-j+1}} - \frac{D^{*}_{n,\nu}}{r_o^{n+1}}\right]$$

$$= \sin\vartheta\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu^0\left[\sum_{j=0}^{n-1}(\frac{1}{2a})^j \frac{C^j_{n,\nu}}{r_o^{n-j+1}} - \frac{C^{*}_{n,\nu}}{r_o^{n+1}}\right]$$

Mit $\frac{1}{r_o} = \frac{\sigma}{2a}(h+\cos\vartheta)$ folgt :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu^1\left[\sum_{j=0}^{n}\sigma^{n-j+1}D^j_{n,\nu}(h+\cos\vartheta)^{n-j+1} - \sigma^{n+1}D^{*}_{n,\nu}(h+\cos\vartheta)^{n+1}\right]$$

$$= \sin\vartheta\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu^0\left[\sum_{j=0}^{n-1}\sigma^{n-j+1}C^j_{n,\nu}(h+\cos\vartheta)^{n-j} - \sigma^{n+1}C^{*}_{n,\nu}(h+\cos\vartheta)^{n}\right]$$

Multiplikation mit $\sigma^k(h+\cos\vartheta)^k\sin\vartheta$, k=0,1,2,... und Integration über $\xi = \cos\vartheta$ von -1 bis $+1$ ergibt wegen (13) , (14) :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{n} L_\nu^{n-j+k+1}.D^j_{n,\nu} - L_\nu^{n+k+1}.D^{*}_{n,\nu}\right]$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\sigma.N_\nu^{n-j+k}.C^j_{n,\nu} - \sigma.N_\nu^{n+k}.C^{*}_{n,\nu}\right], \qquad (63)$$

was die Bestimmung von $D^n_{n,\nu}$ schrittweise ermöglicht.

Außerdem ist $C^{*}_{n,\nu} = D^{*}_{n,\nu} = 0$ für $n \geq 3$ einzusetzen.

§2. Die unmittelbare Lösung

Die Divergenzfreiheit :

Skalare Multiplikation von $\Delta\mathfrak{k} + k^2\mathfrak{k} = 0$ mit $\mathfrak{w}$ ergibt :

$$\mathfrak{w}(\Delta\mathfrak{k}) + k^2(\mathfrak{w}\mathfrak{k}) = 0 \qquad (64)$$

Durch Differentiation läßt sich die folgende Identität bestätigen:

$\Delta(\mathfrak{w}\mathfrak{k}) = \mathfrak{w}(\Delta\mathfrak{k}) + 2\nabla\mathfrak{k}$,was für $\operatorname{div}\mathfrak{k} = 0$ ergibt :

$\Delta(\mathfrak{w}\mathfrak{k}) = \mathfrak{w}(\Delta\mathfrak{k})$, was mit (64) ergibt :

$\Delta(\mathfrak{w}\mathfrak{k}) + k^2(\mathfrak{w}\mathfrak{k}) = 0$

Die letzte Beziehung bedeutet, daß für den Fall: $\operatorname{div}\mathfrak{k} = 0$, die Wellengleichung von der skalaren Größe: $\mathfrak{w}\mathfrak{k} = r\mathfrak{k}_r$ erfüllt wird.

Damit und wegen der Unabhängigkeit vom Azimutwinkel φ kann man den Ansatz machen :

$$\mathfrak{k}_r = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{\zeta_n(kr)}{r} P_n^0(\cos\vartheta) \qquad (65)$$

Wobei : $\zeta_n(kr) \sim \frac{1}{(kr)^{1/2}} H^{(1)}_{n+1/2}(kr)$; $H^{(1)}_{n+1/2}(kr)$ die Hankelsche Funktion 1.Ordnung ist.

Def.: $\zeta_n(kr) = \frac{e^{ik(r+2a)}}{kr}\varphi_n(kr)$,mit dem durch (41) gegebenen $\varphi_n(kr)$.

Mit dieser Definition von $\zeta_n(kr)$ hat $\mathfrak{k}_{\text{refl.}}$ die Dimension $[r]^{-1}$ wie $\mathfrak{k}_{\text{einf.}}$; e^{2ika} ist eine Phasendifferenz, die bei der Reflexion auftritt.

Wegen $\mathfrak{k}_{\varphi\,\text{refl.}} \equiv 0$; $\mathfrak{k}_{r\,\text{refl.}} = \mathfrak{k}_r(r,\vartheta)$; $\mathfrak{k}_{\vartheta\,\text{refl.}} = \mathfrak{k}_\vartheta(r,\vartheta)$ ist :

$$\mathrm{rot}\,\vec{f} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r f_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} f_r\right]\cdot\vec{\varphi} = \chi(r,\vartheta)\cdot\vec{\varphi}$$

$$; \ (\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{f}\,)_\vartheta = -\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\vartheta\cdot\chi)$$

$$; \ (\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{f}\,)_r = \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(r\sin\vartheta\cdot\chi)$$

Wegen $\mathrm{div}\,\vec{f} = 0$ ist $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{f} = k^2\vec{f}$

d.h: $$\frac{\partial}{\partial\vartheta}(r\sin\vartheta\cdot\chi) = k^2r^2\sin\vartheta\cdot f_r \qquad (66)$$

; $$\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\vartheta\cdot\chi) = -k^2 r\sin\vartheta\cdot f_\vartheta \qquad (67)$$

Differentiation von (66) nach r, (67) nach ϑ ergibt wegen(65) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(\frac{d\zeta_n}{dr} + \frac{\zeta_n}{r}\right)\sin\vartheta\, P_n^0(\cos\vartheta) = -\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\cdot f_\vartheta)$$

Also ist $$f_\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n}{n(n+1)}\left(\frac{d\zeta_n}{dr} + \frac{\zeta_n}{r}\right).f_n(\vartheta) \quad , \quad \text{wobei :}$$

$$\frac{d f_n}{d\vartheta} + \mathrm{cotg}\,\vartheta\, f_n + n(n+1)\, P_n^0(\cos\vartheta) = 0$$

Vergleich mit (2) ergibt : $f_n(\vartheta) = \frac{d P_n^0}{d\vartheta} = -P_n^1(\cos\vartheta)$

Also ist $$f_\vartheta = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{n(n+1)}\left(\frac{d\zeta_n}{dr} + \frac{\zeta_n}{r}\right)P_n^1(\cos\vartheta) \qquad (68)$$

Mit $\zeta_n = \frac{e^{ik(r+2a)}}{kr}\varphi_n(kr)$ folgt aus (41) :

$$\frac{\zeta_n}{r} = \frac{e^{ik(r+2a)}}{r}\psi_n(kr) \ , \ \text{wobei:} \ \psi_n(kr) = \sum_{p=0}^{n}\frac{c_{np}}{(kr)^{p+1}}$$

Und $$-\frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{d\zeta_n}{dr} + \frac{\zeta_n}{r}\right) = \frac{e^{ik(r+2a)}}{r}\chi_n(kr) \quad , \quad \text{wobei :}$$

$$\chi_n(kr) = \sum_{p=0}^{n+1}\frac{d_{np}}{(kr)^p} \qquad ; \ d_{no} = -\frac{i}{n(n+1)}$$

$$; \ d_{np} = \frac{i^{p-1}}{n(n+1)}\,\frac{n(n+1) + p(p-1)}{2p}\prod_{\mu=1}^{p-1}\frac{n(n+1) - \mu(\mu-1)}{2\mu} \qquad (69)$$

d.h: $$d_{np} = \frac{i^{p-1}}{n(n+1)}\,\frac{n(n+1) + p(p-1)}{2p}.I(p-1,n) \qquad (\text{vergl.}(25))$$

Aus (65) , (68) ,(69) ist also :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r &= S_n \frac{e^{ik(r+2a)}}{r} \psi_n(kr)\, P_n^0(\cos\vartheta) \\ \mathcal{E}_\vartheta &= S_n \frac{e^{ik(r+2a)}}{r} \chi_n(kr)\, P_n^1(\cos\vartheta) \end{aligned} \qquad (70)$$

Die einfallende Welle :

Die Darstellung (62) für $(\mathcal{E}_{einf.})_F$ läßt sich in der Form schreiben :

$$(\mathcal{E}_{einf.})_F = -\frac{e^{ik(r_o+2a)}}{r_o} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^*(kr_o)\, P_n^0(\cos\vartheta)$$

; $(\mathcal{E}_{einf.})_F = -\frac{e^{ik(r_o+2a)}}{r_o} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n^*(kr_o)\, P_n^1(\cos\vartheta)$, wobei in diesem Fall :

$$\psi_n^*(kr_o) = \sum_{p=0}^{2} \left(\frac{i}{k}\right)^p \frac{C_{pn}^*}{r_o^p} \quad ; \quad \chi_n^*(kr_o) = \sum_{p=0}^{2} \left(\frac{i}{k}\right)^p \frac{D_{pn}^*}{r_o^p}$$

Die Randbedingung :

Aus $\mathcal{N} \times (\mathcal{E}_{refl.} + \mathcal{E}_{einf.})_F = 0$ folgt :

$$(h+\cos\vartheta) \sum_{n=1}^{\infty} \left[S_n \chi_n(kr_o) - \chi_n^*(kr_o) \right] P_n^1 = \sin\vartheta \sum_{n=0}^{\infty} \left[S_n \psi_n(kr_o) - \psi_n^*(kr_o) \right] P_n^0$$

Mit (69) und mit $S_n = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{S_{nq}}{(2ka)^q}$ folgt :

$$(h+\cos\vartheta) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{q=0}^{\infty} \frac{S_{nq}}{(2ka)^q} \sum_{p=0}^{n+1} \frac{d_{np}}{(kr_o)^p} - \sum_{p=0}^{2} i^p \frac{D_{pn}^*}{(kr_o)^p} \right] P_n^1(\cos\vartheta)$$

$$= \sin\vartheta \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{q=0}^{\infty} \frac{S_{nq}}{(2ka)^q} \sum_{p=0}^{n} \frac{c_{np}}{(kr_o)^{p+1}} - \sum_{p=0}^{2} i^p \frac{C_{pn}^*}{(kr_o)^p} \right] P_n^0(\cos\vartheta)$$

Mit $\frac{1}{r_o} = \frac{\sigma}{2a}(h+\cos\vartheta)$ folgt aus dem Verschwinden des Koeffizienten von k^{-p} ; $p \geq 3$

$$(h+\cos\vartheta)\sum_{n=1}^{\infty} P_n^1\Big[\sum_{j=o}^{p} \varepsilon^{p-j}\, S_{nj}\, d_{n,p-j}\,(h+\cos\vartheta)^{p-j}\Big]$$

$$= \sin\vartheta \sum_{n=o}^{\infty} P_n^o\Big[\sum_{j=o}^{p-1} \varepsilon^{p-j}\, S_{nj}\, c_{n,p-j-1}\,(h+\cos\vartheta)^{p-j}\Big]$$

Multiplikation mit $\varepsilon^{k}(h+\cos\,)^{k}\sin\vartheta$,k=o,1,2,... und

Integration über $\xi = \cos\vartheta$ von -1 bis +1 ergibt :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=o}^{p} S_{nj}\, d_{n,p-j}\cdot L_n^{p-j+k+1} - \sum_{n=o}^{\infty}\sum_{j=o}^{p-1} S_{nj}\, c_{n,p-j-1}\cdot N_n^{p-j+k} = 0 \qquad (71)$$

Die Formel (63) läßt sich für $n \geq 3$ mit anderen Indices in der

Form schreiben :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=o}^{p} D_{p,n}^{j}\cdot L_n^{p-j+k+1} - \sum_{n=o}^{\infty}\sum_{j=o}^{p-1} C_{p,n}^{j}\cdot N_n^{p-j+k} = 0 \qquad (72)$$

Vergleich von (71) und (72) ergibt :

$S_{nj}\cdot c_{n,p-j-1} = ß.C_{p,n}^{j}$; $S_{nj}\cdot d_{n,p-j} = ß.D_{p,n}^{j}$;ß: Zahlenfaktor

Mit Hilfe der Formeln: (41),(57),(58),(69) folgt wie bei der

skalaren Welle : $S_{nj} = i^{j+1}.C_{j+1,n}^{j}$ (73)

§3. Vergleich mit der früheren Lösung

Aus (69) , (70) folgt :

$$f_r = \frac{e^{ik(r+2a)}}{r}\left[\left\{S_{oo} + \frac{S_{o1}}{2ka} + \frac{S_{o2}}{(2ka)^2}+\cdots\right\}\frac{c_{oo}}{kr}\ P_o^o + \left\{S_{1o} + \frac{S_{11}}{2ka} + \frac{S_{12}}{(2ka)^2}+\cdots\right\}\left\{\frac{c_{1o}}{2ka} + \frac{c_{11}}{(2ka)^2}\right\}P_1^o + \cdots\right]$$

$$f_\vartheta = \frac{e^{ik(r+2a)}}{r}\left[\left\{S_{1o} + \frac{S_{11}}{2ka} + \frac{S_{12}}{(2ka)^2}+\cdots\right\}\left\{d_{1o} + \frac{d_{11}}{kr} + \frac{d_{12}}{(kr)^2}\right\}P_1^1 + \left\{S_{2o} + \frac{S_{21}}{2ka} + \frac{S_{22}}{(2ka)^2}+\cdots\right\}\left\{d_{2o} + \frac{d_{21}}{kr} + \frac{d_{22}}{(kr)^2} + \frac{d_{23}}{(kr)^3}\right\}P_2^1 + \cdots\right]$$

Mit $f_r = e^{ik(r+2a)} \sum_{n=o}^{\infty} (\frac{i}{k})^n f_r^n$; $f_\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{i}{k})^n f_\vartheta^n$ ist :

$$f_r^n = \sum_{\nu=o}^{\infty} F_{n\nu}(r)\ P_\nu^o(\cos\vartheta) \quad ; \quad f_\vartheta^n = \sum_{\nu=1}^{\infty} G_{n\nu}(r)\ P_\nu^1(\cos\vartheta)\ , \text{ wobei:}$$

$$F_{n\nu}(r) = i^{-n} \sum_{j=o}^{n-1} (\frac{1}{2a})^j \frac{S_{\nu j}\cdot c_{\nu,n-j-1}}{r^{n-j+1}}$$

$$; \ G_{n\nu}(r) = i^{-n} \sum_{j=o}^{n} (\frac{1}{2a})^j \frac{S_{\nu j}\cdot d_{\nu,n-j}}{r^{n-j+1}}$$

Mit Hilfe der Formeln: (41),(57),(58),(69) folgt wie bei der skalaren Welle : $i^{-n}S_{\nu j}c_{\nu,n-j-1} = C^j_{n,\nu}$; $i^{-n}S_{\nu j}d_{\nu,n-j} = D^j_{n,\nu}$

Damit ist $f_r^n = \sum_{j=o}^{n} (\frac{1}{2a})^j \frac{f_n^j(\vartheta)}{r^{n-j+1}}$; $f_\vartheta^n = \sum_{j=o}^{n} (\frac{1}{2a})^j \frac{g_n^j(\vartheta)}{r^{n-j+1}}$, wobei:

$$f_n^j(\vartheta) = \sum_{\nu=o}^{\infty} C^j_{n,\nu}\ P_\nu^o(\cos\vartheta) \quad ; \quad g_n^j(\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} D^j_{n,\nu}\ P_\nu^1(\cos\vartheta)\ ,$$

in Übereinstimmung mit der früheren Lösung.

§4. Die Cartesischen Komponenten

Aus der Funktionalbeziehungen der Zylinderfunktionen :

$$Z_{n+1}(\rho) + Z_{n-1}(\rho) = \frac{2n}{\rho} Z_n(\rho) \quad ; \quad Z_{n+1}(\rho) - Z_{n-1}(\rho) = -2\frac{dZ_n}{d\rho}$$

lassen sich für $\zeta_n(kr) = \frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kr)}{(kr)^{1/2}}$ folgende Beziehungen ableiten :

$$\frac{\zeta_n}{r} = \frac{k}{2n+1}(\zeta_{n+1} + \zeta_{n-1}) \quad ; \quad \frac{d\zeta_n}{dr} + \frac{\zeta_n}{r} = \frac{k}{2n+1}\left[(n+1)\zeta_{n-1} - n\,\zeta_{n+1}\right]$$

Einsetzen in (65) und (68) ergibt :

$$\mathcal{L}^n_r = \frac{k\,S_n}{2n+1}(\zeta_{n+1} + \zeta_{n-1})P^0_n \quad ; \mathcal{L}^n_\vartheta = \frac{k\,S_n}{2n+1}\left(\frac{\zeta_{n+1}}{n+1} - \frac{\zeta_{n-1}}{n}\right)P^1_n \qquad (74)$$

Aus $\mathcal{L}_x = \cos\varphi(\sin\vartheta\,\mathcal{L}_r + \cos\vartheta\,\mathcal{L}_\vartheta)$; $\mathcal{L}_y = \sin\varphi(\sin\vartheta\,\mathcal{L}_r + \cos\vartheta\,\mathcal{L}_\vartheta)$; $\mathcal{L}_z = -\cos\vartheta\,\mathcal{L}_r + \sin\vartheta\,\mathcal{L}_\vartheta$ folgt :

$$\mathcal{L}^n_x = \frac{k\,S_n}{2n+1}\cos\varphi\left[\zeta_{n+1}\left\{\sin\vartheta\,P^0_n + \frac{\cos\vartheta}{n+1}P^1_n\right\} + \zeta_{n-1}\left\{\sin\vartheta\,P^0_n - \frac{\cos\vartheta}{n}P^1_n\right\}\right]$$

$$\mathcal{L}^n_y = \frac{k\,S_n}{2n+1}\sin\varphi\left[\zeta_{n+1}\left\{\sin\vartheta\,P^0_n + \frac{\cos\vartheta}{n+1}P^1_n\right\} + \zeta_{n-1}\left\{\sin\vartheta\,P^0_n - \frac{\cos\vartheta}{n}P^1_n\right\}\right] \qquad (75)$$

$$= \frac{k\,S_n}{2n+1}\left[\zeta_{n+1}\left\{-\cos\vartheta\,P^0_n + \frac{\sin\vartheta}{n+1}P^1_n\right\} - \zeta_{n-1}\left\{\cos\vartheta\,P^0_n + \frac{\sin\vartheta}{n}P^1_n\right\}\right]$$

Mit Hilfe der Formeln:(5),(7),(8),(19) nimmt (75) die Form an :

$$\mathcal{L}^n_x = \frac{k\,S_n}{2n+1}\cos\varphi\left[\frac{\zeta_{n+1}}{n+1}P^1_{n+1} - \frac{\zeta_{n-1}}{n}P^1_{n-1}\right]$$

$$\mathcal{L}^n_y = \frac{k\,S_n}{2n+1}\sin\varphi\left[\frac{\zeta_{n+1}}{n+1}P^1_{n+1} - \frac{\zeta_{n-1}}{n}P^1_{n-1}\right]$$

$$\mathcal{L}^n_z = -\frac{k\,S_n}{2n+1}\left[\zeta_{n+1}P^0_{n+1} + \zeta_{n-1}P^0_{n-1}\right]$$

d.h: $\mathcal{L}_x = \cos\varphi\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\zeta_n(kr)\,P^1_n(\cos\vartheta)$; $\mathcal{L}_y = \sin\varphi\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\zeta_n(kr)P^1_n(\cos\vartheta)$

; $\mathcal{L}_z = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\zeta_n(kr)\,P^0_n(\cos\vartheta)$, wobei :

$$\alpha_n = k\left[\frac{S_{n-1}}{n(2n-1)} - \frac{S_{n+1}}{(n+1)(2n+3)}\right] \quad ; \beta_n = -k\left[\frac{S_{n-1}}{2n-1} + \frac{S_{n+1}}{2n+3}\right]$$

Mit (73) und mit $\zeta_n(kr) = \frac{e^{ik(r+2a)}}{kr}\varphi_n(kr)$ ist also :

$$\mathcal{E}_x = \frac{e^{ik(r+2a)}}{r}\cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \varphi_n(kr)\, P_n^1(\cos\vartheta)$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{e^{ik(r+2a)}}{r}\sin\varphi \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \varphi_n(kr)\, P_n^1(\cos\vartheta) \qquad (76)$$

$$\mathcal{E}_z = \frac{e^{ik(r+2a)}}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n \varphi_n(kr)\, P_n^0(\cos\vartheta) \text{ , wobei in diesem Fall :}$$

$$\alpha_n = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha_{nj}}{(2ka)^j} \quad ; \alpha_{nj} = i^{j+1}\left[\frac{C^j_{j+1,n-1}}{n(2n-1)} - \frac{C^j_{j+1,n+1}}{(n+1)(2n+3)}\right]$$

$$\beta_n = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\beta_{nj}}{(2ka)^j} \quad ; \beta_{nj} = -i^{j+1}\left[\frac{C^j_{j+1,n-1}}{2n-1} + \frac{C^j_{j+1,n+1}}{2n+3}\right]$$

Also erfüllt jede Cartesische Komponente die Wellengleichung, wie es sein muß. Allerdings ist (76) ein Spezialfall der allgemeinen Reihe:

$$\mathcal{E}_x = \frac{e^{ik(r+2a)}}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[A_n^m \cos(m\varphi) + B_n^m \sin(m\varphi)\right]\varphi_n(kr)\, P_n^m(\cos\vartheta)$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{e^{ik(r+2a)}}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[C_n^m \cos(m\varphi) + D_n^m \sin(m\varphi)\right]\varphi_n(kr)\, P_n^m(\cos\vartheta)$$

$$\mathcal{E}_z = \frac{e^{ik(r+2a)}}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[E_n^m \cos(m\varphi) + F_n^m \sin(m\varphi)\right]\varphi_n(kr)\, P_n^m(\cos\vartheta)$$

Und zwar mit : $B_n^m = C_n^m = F_n^m = 0$, und :

$$A_n^m = D_n^m = \begin{cases}\alpha_n \text{ für } m = 1\\ 0 \text{ sonst}\end{cases} \quad ; \quad B_n^m = \begin{cases}\beta_n \text{ für } m = 0\\ 0 \text{ sonst}\end{cases}$$

B.) Hyperboloid - Dipol senkrecht zur Symmetrieachse

§1. Entwicklung nach Kugelfunktionen

Nach [6] hat $\psi_{refl.}$ folgende Form :

$$\psi = e^{ik(r+2a)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{k}\right)^n \psi_n \quad , \text{ und :}$$

$$\psi_r^n = \cos\varphi \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2a}\right)^j \frac{f_n^j(\vartheta)}{r^{n-j+1}} \; ; \; \psi_\vartheta^n = \cos\varphi \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2a}\right)^j \frac{g_n^j(\vartheta)}{r^{n-j+1}} \qquad (77)$$

$$; \psi_\varphi^n = \sin\varphi \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2a}\right)^j \frac{h_n^j(\vartheta)}{r^{n-j+1}}$$

Daraus folgt :

$$\operatorname{div}\psi_n = \cos\varphi \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2a}\right)^j \frac{1}{r^{n-j+2}} \left[\left(\frac{d}{d\vartheta} + \operatorname{cotg}\vartheta\right) g_n^j - (n-j-1) f_n^j + \frac{h_n^j}{\sin\vartheta} \right]$$

$$(\nabla^2\psi^n)_\vartheta = \cos\varphi \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2a}\right)^j \frac{1}{r^{n-j+3}} \left[\left\{ \frac{d^2}{d\vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta \frac{d}{d\vartheta} + (n-j)(n-j+1) - \frac{2}{\sin^2\vartheta} \right\} g_n^j - 2 \frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} h_n^j + 2 \frac{d f_n^j}{d\vartheta} \right]$$

$$(\nabla^2\psi^n)_\varphi = \sin\varphi \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2a}\right)^j \frac{1}{r^{n-j+3}} \left[\left\{ \frac{d^2}{d\vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta \frac{d}{d\vartheta} + (n-j)(n-j+1) - \frac{2}{\sin^2\vartheta} \right\} h_n^j - 2 \frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} g_n^j - \frac{2}{\sin\vartheta} f_n^j \right]$$

$$\frac{\partial \psi_r^n}{\partial r} + \frac{1}{r}\psi_\vartheta^n = - \cos\varphi \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2a}\right)^j \frac{n-j}{r^{n-j+2}} g_n^j$$

$$\frac{\partial \psi_\varphi^n}{\partial r} + \frac{1}{r}\psi_\varphi^n = - \sin\varphi \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2a}\right)^j \frac{n-j}{r^{n-j+2}} h_n^j$$

Einsetzen in : $\frac{\partial \psi^n}{\partial r} + \frac{1}{r}\psi^n = \frac{1}{2}\nabla^2\psi^{n-1}$ bzw. in $\psi_r^n = \operatorname{div}\psi^{n-1}$ ergibt:

$$-2(n-j)g_n^j = \left[\frac{d^2}{d\vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta\frac{d}{d\vartheta} + (n-j)(n-j-1) - \frac{2}{\sin^2\vartheta}\right] g_{n-1}^j$$

$$- 2\frac{\cos}{\sin^2\vartheta} h_{n-1}^j + 2\frac{d f_{n-1}^j}{d\vartheta} \quad , \quad j \leqq n-1 \tag{78}$$

$$; \; -2(n-j)h_n^j = \left[\frac{d^2}{d\vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta\frac{d}{d\vartheta} + (n-j)(n-j-1) - \frac{2}{\sin^2\vartheta}\right] h_{n-1}^j$$

$$- 2\frac{\cos}{\sin^2\vartheta} g_{n-1}^j - \frac{2}{\sin\vartheta} f_{n-1}^j \tag{79}$$

$$; \; f_n^j = \left(\frac{d}{d\vartheta} + \operatorname{cotg}\vartheta\right) g_{n-1}^j + \frac{1}{\sin\vartheta} h_{n-1}^j - (n-j-2) f_{n-1}^j \tag{80}$$

Aus (78) und (79) kann man f_{n-1}^j eliminieren, indem man (79) nach Multiplikation mit $\sin\vartheta$ differenziert, und das Ergebnis zu (78) addiert. Die auf diese Weise gewonnene Doppelbeziehung läßt sich noch auf die Form bringen :

$$g_n^j = -\frac{d}{d\vartheta}(\sin\vartheta h_n^j) \quad , \quad j \leqq n-1 \tag{81}$$

Mit $h_n^j = \frac{1}{\sin\vartheta}\bar{h}_n^j$ folgt aus (79) und (81) :

$$-2(n-j)\bar{h}_n^j = \left[\frac{d^2}{d\vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta\frac{d}{d\vartheta} + (n-j)(n-j-1) - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\right]\bar{h}_{n-1}^j - 2f_{n-1}^j \tag{82}$$

Aus (80) und (81) folgt :

$$f_n^j + (n-j-2) f_{n-1}^j = -\left[\frac{d^2}{d\vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta\frac{d}{d\vartheta} - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\right]\bar{h}_{n-1}^j \tag{83}$$

Daraus sieht man, daß f_n^j bzw. $\bar{h}_n^j$ sich nach $P_\nu^1(\cos\vartheta)$ entwickeln läßt.

Mit $f_n^j = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{n,\nu}^j P_\nu^1(\cos\vartheta)$; $\bar{h}_n^j = \sum_{\nu=1}^{\infty} E_{n,\nu}^j P_\nu^1(\cos\vartheta)$ folgt aus (82) und (83) :

$$-2(n-j) E_{n,\nu}^j = \left[(n-j)(n-j-1) - \nu(\nu+1)\right] E_{n-1,\nu}^j - 2 C_{n-1,\nu}^j$$

$$; \; C_{n,\nu}^j = \nu(\nu+1) E_{n-1,\nu}^j - (n-j-2) C_{n-1,\nu}^j$$

Dies sind genau die Formeln (53) und (54) der ersten Dipol-orientierung. Damit ist :

$$C^j_{n,\nu} = I(n-j-1,\nu).C^j_{j+1,\nu} \qquad (84)$$

$$; E^j_{n,\nu} = \frac{\nu(\nu+1) + (n-j)(n-j-1)}{2(n-j)} I(n-j-1,\nu).E^j_{j,\nu} \qquad (85)$$

; $E^n_{n,\nu}$ läßt sich durch die Randbedingung bestimmen.

Aus (81) folgt : $g^j_n(\vartheta) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} E^j_{n,\nu} \frac{d P^1_\nu}{d\vartheta}$

Mit $g^j_n(\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} D^j_{n,\nu} \frac{P^1_\nu}{\sin\vartheta}$ ist :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} D^j_{n,\nu} P^1_\nu = -\sum_{\nu=1}^{\infty} E^j_{n,\nu} \sin\vartheta \frac{d P^1_\nu}{d\vartheta} \quad , \text{ was mit (20) ergibt :}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} D^j_{n,\nu} P^1_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} E^j_{n,\nu}\left[\frac{(\nu+1)^2}{2\nu+1} P^1_{\nu-1} - \frac{\nu^2}{2\nu+1} P^1_{\nu+1}\right]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{(\nu+2)^2}{2\nu+3} E^j_{n,\nu+1} - \frac{(\nu-1)^2}{2\nu-1} E^j_{n,\nu-1}\right] P^1_\nu$$

Also ist $g^j_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} D^j_{n,\nu} \frac{P^1_\nu}{\sin\vartheta}$, wobei :

$$D^j_{n,\nu} = \frac{(\nu+2)^2}{2\nu+3} E^j_{n,\nu+1} - \frac{(\nu-1)^2}{2\nu-1} E^j_{n,\nu-1} \quad , \quad j \leq n-1 \qquad (86)$$

Die einfallende Welle :

Die elektrische Feldstärke dieser Dipolorientierung läßt sich ableiten aus : $\mathfrak{E} = \text{rot rot}(\frac{e^{ikR}}{R} \mathfrak{i})$ wobei $\mathfrak{i}$ der Einheitsvektor der x-Richtung ist.

Daraus folgt : $(\mathfrak{E}_{einf.})_F = e^{ik(r_o+2a)} \sum_{n=o}^{2} (\frac{i}{k})^n (\mathfrak{E}^n_{einf.})_F$, mit:

$$\mathfrak{E}^o_r = \cos\varphi \frac{1}{2h^2} \frac{1}{r_o}\left[(1-h^2)(\frac{r_o}{R_o})^3 - 2(\frac{r_o}{R_o})^2 + (1+h^2)\frac{r_o}{R_o}\right]\sin\vartheta$$

$$\mathfrak{E}^1_r = -\cos\varphi \frac{1}{2h^2} \frac{1}{r_o^2}\left[3(1-h^2)(\frac{r_o}{R_o})^4 - 6(\frac{r_o}{R_o})^3 + (3-h^2)(\frac{r_o}{R_o})^2\right]\sin\vartheta$$

$$\mathfrak{E}^2_r = -\cos\varphi \frac{1}{2h^2} \frac{1}{r_o^3}\left[3(1-h^2)(\frac{r_o}{R_o})^5 - 6(\frac{r_o}{R_o})^4 + (3-h^2)(\frac{r_o}{R_o})^3\right]\sin\vartheta$$

$$\mathcal{L}_{\varphi}^{0} = \cos\varphi \frac{1}{4h^3} \frac{1}{r_o} \left[(1-h^2)^2 \left(\frac{r_o}{R_o}\right)^3 - (3-2h^2-h^4)\left(\frac{r_o}{R_o}\right)^2 + 3(1+h^4)\frac{r_o}{R_o} - (1-h^4) \right]$$

$$\mathcal{L}_{\varphi}^{1} = -\cos\varphi \frac{1}{4h^3} \frac{1}{r_o^2} \left[3(1-h^2)^2 \left(\frac{r_o}{R_o}\right)^4 - 3(3-2h^2-h^4)\left(\frac{r_o}{R_o}\right)^3 + (9-4h^2-h^4)\left(\frac{r_o}{R_o}\right)^2 - (3-4h^2+h^4)\left(\frac{r_o}{R_o}\right) \right]$$

$$\mathcal{L}_{\vartheta}^{1} = -\cos\varphi \frac{1}{4h^3} \frac{1}{r_o^3} \left[3(1-h^2)^2 \left(\frac{r_o}{R_o}\right)^5 - 3(3-2h^2-h^4)\left(\frac{r_o}{R_o}\right)^4 + (9-4h^2-h^4)\left(\frac{r_o}{R_o}\right)^3 - (3-4h^2+h^4)\left(\frac{r_o}{R_o}\right)^2 \right]$$

$$\mathcal{L}_{\varphi}^{0} = -\sin\varphi \frac{1}{r_o}\left(\frac{r_o}{R_o}\right) \; ; \; \mathcal{L}_{\varphi}^{1} = \sin\varphi \frac{1}{r_o^2}\left(\frac{r_o}{R_o}\right)^2 \; ; \; \mathcal{L}_{\varphi}^{2} = \sin\varphi \frac{1}{r_o^3}\left(\frac{r_o}{R_o}\right)^3$$

Für die erste Dipolorientierung wurde $\left(\frac{r_o}{R_o}\right)^n$, $\left(\frac{r_o}{R_o}\right)^n \sin\vartheta$ für $n \leq 5$ nach P_ν^0 bzw. P_ν^1 entwickelt(vergl. Seite28).Damit ist :

$$\left(\mathcal{L}_{T}^{\text{einf.}}\right)_F = -\cos\varphi \frac{1}{r_o^{n+1}} \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{n,\nu}^{*} \; P_\nu^1$$

$$\left(\mathcal{L}_{\vartheta}^{\text{einf.}}\right)_F = -\cos\varphi \frac{1}{r_o^{n+1}} \sum_{\nu=1}^{\infty} D_{n,\nu}^{*} \; \frac{P_\nu^1}{\sin\vartheta} \qquad (87)$$

$$\left(\mathcal{L}_{\varphi}^{\text{einf.}}\right)_F = -\sin\varphi \frac{1}{r_o^{n+1}} \sum_{\nu=1} E_{n,\nu}^{*} \; \frac{P_\nu^1}{\sin\vartheta} \quad , \quad \text{wobei :}$$

$$C_{0,\nu}^{*} = \frac{1}{2h^2}\left[-(1-h^2)\,B_\nu^3 + 2\,B_\nu^2 - (1+h^2)\,B_\nu^1 \right]$$

$$C_{1,\nu}^{*} = \frac{1}{2h^2}\left[3(1-h^2)\,B_\nu^4 - 6\,B_\nu^3 + (3-h^2)\,B_\nu^2 \right]$$

$$C_{2,\nu}^{*} = \frac{1}{2h^2}\left[3(1-h^2)\,B_\nu^5 - 6\,B_\nu^4 + (3-h^2)\,B_\nu^3 \right]$$

$$D_{0,\nu}^{*} = \frac{1}{4h^3}\left[-(1-h^2)^2 B_\nu^3 + (3-2h^2-h^4)B_\nu^2 - (3+3h^4)B_\nu^1 \right]$$

$$D_{1,\nu}^{*} = \frac{1}{4h^3}\left[3(1-h^2)^2 B_\nu^4 - 3(3-2h^2-h^4)B_\nu^3 + (9-4h^2-h^4)B_\nu^2 - (3-4h^2+h^4)B_\nu^1 \right]$$

$$D_{2,\nu}^{*} = \frac{1}{4h^3}\left[3(1-h^2)^2 B_\nu^5 - 3(3-2h^2-h^4)B_\nu^4 + (9-4h^2-h^4)B_\nu^3 - (3-4h^2+h^4)B_\nu^2 \right]$$

Allerdings ist wegen des von $\frac{r_o}{R_o}$ freien Gliegs in $\mathcal{L}_{\vartheta}^{0}$:

$$D_{0,0}^{*} = \frac{1}{4h^3}\left[-(1-h^2)^2 B_0^3 + (3-2h^2-h^4)B_0^2 - (3+3h^4)B_0^1 + (1-h^4) \right]$$

; $E_{0,\nu}^{*} = B_\nu^1$; $E_{1,\nu}^{*} = -B_\nu^2$; $E_{2,\nu}^{*} = -B_\nu^3$

Die Randbedingung :

Aus $\mathcal{W}X(\mathcal{f})_F = 0 \quad ; \quad \mathcal{f} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{i}{k})^n \mathcal{f}^n$ folgt :

a.) $\mathcal{W}_r(\mathcal{f}^n_{\vartheta\,\text{refl.}} + \mathcal{f}^n_{\vartheta\,\text{einf.}})_F = \mathcal{W}_\vartheta(\mathcal{f}^n_{r\,\text{refl.}} + \mathcal{f}^n_{r\,\text{einf.}})_F$

d.h: $(h+\cos\vartheta)\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}(\frac{1}{2a})^j \frac{1}{r_o^{n-j+1}} D^j_{n,\nu} \frac{P^1_\nu}{\sin\vartheta} - \frac{1}{r_o^{n+1}}\sum_{\nu=1}^{\infty} D^*_{n,\nu}\frac{P^1_\nu}{\sin\vartheta}\right]$

$= \sin\vartheta\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}(\frac{1}{2a})^j \frac{1}{r_o^{n-j+1}} C^j_{n,\nu} P^1_\nu - \frac{1}{r_o^{n+1}} C^*_{n,\nu} P^1_\nu\right]$

Mit $\frac{1}{r_o} = \frac{\sigma}{2a}(h+\cos\vartheta)$ ist :

$\sum_{\nu=1}^{\infty} P^1_\nu\left[\sum_{j=0}^{n} \sigma^{n-j} D^j_{n,\nu}(h+\cos\vartheta)^{n-j+1} - \sigma^n D^*_{n,\nu}(h+\cos\vartheta)^{n+1}\right]$

$= \sin\vartheta\sum_{\nu=1}^{\infty} P^1_\nu\left[\sum_{j=0}^{n-1} \sigma^{n-j} C^j_{n,\nu}(h+\cos\vartheta)^{n-j} - \sigma^n C^*_{n,\nu}(h+\cos\vartheta)^n\right]$

Multiplikation mit $\sigma^k(h+\cos\vartheta)^k\sin\vartheta$, k=0,1,2,... und Integration über $\xi=\cos\vartheta$ von -1 bis $+1$ ergibt wegen (13) :

$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{n} L^{n-j+k+1}_\nu . D^j_{n,\nu} - L^{n+k+1}_\nu . D^*_{n,\nu}\right]$

$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{n-1} \sigma . M^{n-j+k}_\nu . C^j_{n,\nu} - \sigma . M^{n+k}_\nu . D^*_{n,\nu}\right]$ (88)

Wobei $C^*_{n,\nu} = D^*_{n,\nu} = 0$ für $n \geq 3$ einzusetzen ist.

b.) $(\mathcal{f}^n_{\varphi\,\text{refl.}} + \mathcal{f}^n_{\varphi\,\text{einf.}})_F = 0$

d.h: $\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}(\frac{1}{2a})^j \frac{1}{r_o^{n-j+1}} E^j_{n,\nu} \frac{P^1_\nu}{\sin\vartheta} - \frac{1}{r_o^{n+1}}\sum_{\nu=1}^{\infty} E^*_{n,\nu}\frac{P^1_\nu}{\sin\vartheta} = 0$

Mit $\frac{1}{r_o} = \frac{\sigma}{2a}(h+\cos\vartheta)$ folgt :

$\sum_{\nu=1}^{\infty} P^1_\nu\left[\sum_{j=0}^{n} \sigma^{n-j} E^j_{n,\nu}(h+\cos\vartheta)^{n-j} - \sigma^n E^*_{n,\nu}(h+\cos\vartheta)^n\right] = 0$

Multiplikation mit $\sigma^k(h+\cos\vartheta)^k\sin\vartheta$ und Integration ergibt :

$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{n} L^{n-j+k}_\nu . E^j_{n,\nu} - L^{n+k}_\nu . E^*_{n,\nu}\right] = 0$ (89)

§2. Die unmittelbare Lösung

Symmetrieeigenschaften: Die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle zeigt folgende Symmetrie:

$$f_r(\varphi) = f_r(-\varphi) = -f_r(\pi-\varphi)$$
$$f_\vartheta(\varphi) = f_\vartheta(-\varphi) = -f_\vartheta(\pi-\varphi)$$
$$f_\varphi(\varphi) = -f_\varphi(-\varphi) = f_\varphi(\pi-\varphi)$$

Diesselbe φ-Abhängigkeit zeigt auch die elektrische Feldstärke der reflektierten Welle, wenn die reflektierende Fläche bezüglich der xz-Ebene und der yz-Ebene symmetrisch ist.

Also ist in diesem Fall :

$$\begin{aligned} f_{r\,\text{refl.}} &= \sum_m^\infty f^{2m+1}(r,\vartheta).\cos(2m+1)\varphi \\ f_{\vartheta\,\text{refl.}} &= \sum_m^\infty g^{2m+1}(r,\vartheta).\cos(2m+1)\varphi \\ f_{\varphi\,\text{refl.}} &= \sum_m^\infty h^{2m+1}(r,\vartheta).\sin(2m+1)\varphi \end{aligned} \qquad (90)$$

Für den Fall einer um die z-Achse rotationssymmetrische Fläche wird gezeigt, daß jede der Reihen (90) nach dem ersten Glied (m=o) abbricht. Damit hat die reflektierte elektrische Feldstärke diesselbe φ-Abhängigkeit wie die einfallende.

Wie bei der ersten Dipolorientierung folgt aus der Divergenzfreiheit :

$$f_r = \sum_{m=0}^{\infty} \cos(2m+1)\varphi \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{2m+1} \frac{\zeta_n(kr)}{r} P_n^{2m+1}(\cos\vartheta) \qquad (91)$$

Ein entsprechender Ansatz für f_ϑ bzw. f_φ ist:

$$\begin{aligned} f_\vartheta &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos(2m+1)\varphi \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{2m+1}(r).G_n^{2m+1}(\vartheta) \\ f_\varphi &= \sum_{m=0}^{\infty} \sin(2m+1)\varphi \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{2m+1}(r).H_n^{2m+1}(\vartheta) \end{aligned} \qquad (92)$$

Daraus folgt :

$$\begin{aligned} (\text{rot rot } f)_r = \sum_m \cos(2m+1)\varphi \sum_n \Bigg[& - S_n^{2m+1} \frac{\zeta_n}{r^3} \left\{ \frac{d^2}{d\vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta \frac{d}{d\vartheta} \right. \\ & \left. - \frac{(2m+1)^2}{\sin^2\vartheta} \right\} P_n^{2m+1} + \left\{ \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \right\} g_n^{2m+1} \cdot \left\{ \frac{d}{d\vartheta} + \operatorname{cotg}\vartheta \right\} G_n^{2m+1} \\ & + \left\{ \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \right\} h_n^{2m+1} \cdot \frac{2m+1}{\sin\vartheta} H_n^{2m+1} \Bigg] \end{aligned} \qquad (93)$$

Wegen (2)und$(\text{rot rot } f)_r = k^2 f_r$ folgt aus (91)und (93) :

$$\begin{aligned} \sum_n \Bigg[& n(n+1) S_n^{2m+1} \frac{\zeta_n}{r^3} P_n^{2m+1} + \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\right) g_n^{2m+1} \cdot \left(\frac{d}{d\vartheta} + \operatorname{cotg}\vartheta\right) G_n^{2m+1} \\ & + \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\right) h_n^{2m+1} \cdot \frac{2m+1}{\sin\vartheta} H_n^{2m+1} \Bigg] = k^2 \sum_n S_n^{2m+1} \frac{\zeta_n}{r} P_n^{2m+1} \end{aligned} \qquad (94)$$

Die linke Seite von (94) nimmt die Form $\sum_n \psi_n(r)\, P_n^{2m+1}(\cos\vartheta)$ an,

wenn folgendes gilt :

$$G_n^{2m+1}(\vartheta) = \lambda_n^{2m+1} \frac{P_n^{2m+1}}{\sin\vartheta} + \Gamma_n^{2m+1} \frac{d\, P_n^{2m+1}}{d\vartheta} \quad ;$$

$$H_n^{2m+1}(\vartheta) = -(2m+1)\Gamma_n^{2m+1} \frac{P_n^{2m+1}}{\sin\vartheta} - \frac{\lambda_n^{2m+1}}{2m+1} \frac{d\, P_n^{2m+1}}{d\vartheta} + \Lambda_n^{2m+1} \sin\vartheta\, P_n^{2m+1},$$

$$h_n^{2m+1}(r) = g_n^{2m+1}(r)$$

Einsetzen in $(\text{rot rot } f)_\vartheta = k^2 f_\vartheta$ bzw. $(\text{rot rot } f)_\varphi = k^2 f_\varphi$ ergibt aber:
$\lambda_n^{2m+1} = \Lambda_n^{2m+1} = 0$,wie man leicht zeigen kann.Damit ist :

$$G_n^{2m+1}(\vartheta) = \Gamma_n^{2m+1} \frac{d\, P_n^{2m+1}}{d\vartheta} \quad ; \quad H_n^{2m+1}(\vartheta) = -(2m+1)\Gamma_n^{2m+1} \frac{P_n^{2m+1}}{\sin\vartheta} \tag{95}$$

$$; \quad g_n^{2m+1}(r) = h_n^{2m+1}(r) \tag{96}$$

Einsetzen in (94) ergibt:

$$n(n+1)\, S_n^{2m+1} \frac{\zeta_n}{r^2} - n(n+1)\Gamma_n^{2m+1} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) g_n^{2m+1} = k^2 S_n^{2m+1} \zeta_n(kr)$$

d.h: $$\Gamma_n^{2m+1} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) g_n^{2m+1} = -\frac{S_n^{2m+1}}{n(n+1)} \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)\zeta_n(kr)$$

Die Differentialgleichung für $\zeta_n(kr)$ lautet:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)\right]\zeta_n(kr) = 0$$

Daraus folgt :

$$\Gamma_n^{2m+1} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) g_n^{2m+1} = \frac{S_n^{2m+1}}{n(n+1)} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)\zeta_n(kr)$$

Also ist: $$g_n^{2m+1}(r) = \frac{R_n^{2m+1}}{n(n+1)} \left(\frac{d\zeta_n}{dr} + \frac{\zeta_n}{r}\right) \tag{97}$$

Aus (91),(92),(95),(96),(97) folgt:

$$\begin{aligned} f_r &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos(2m+1)\varphi \sum_n S_n^{2m+1} \frac{\zeta_n(kr)}{r} P_n^{2m+1}(\cos\vartheta) \\ f_\vartheta &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos(2m+1)\varphi \sum_n \frac{R_n^{2m+1}}{n(n+1)} \left(\frac{d\zeta_n}{dr} + \frac{\zeta_n}{r}\right) \frac{d\, P_n^{2m+1}}{d\vartheta} \\ f_\varphi &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sin(2m+1)\varphi \sum_n \frac{R_n^{2m+1}}{n(n+1)} \left(\frac{d\zeta_n}{dr} + \frac{\zeta_n}{r}\right) \frac{P_n^{2m+1}}{\sin\vartheta} \end{aligned} \tag{98}$$

Mit $\zeta_n(kr) = \frac{e^{ik(r+2a)}}{kr} \varphi_n(kr)$, $\varphi_n(kr) = \sum_{p=0}^{n} \frac{c_{np}}{(kr)^p}$ folgt

wie bei der ersten Dipolorientierung:

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{e^{ik(r+2a)}}{r} \sum_m \cos(2m+1)\varphi \sum_n S_n^{2m+1} \psi_n(kr)\, P_n^{2m+1}(\cos\vartheta) \\ f_\vartheta &= -\frac{e^{ik(r+2a)}}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \cos(2m+1)\varphi \sum_n R_n^{2m+1} \chi_n(kr) \frac{d\, P_n^{2m+1}}{d\vartheta} \\ f_\varphi &= \frac{e^{ik(r+2a)}}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \sin(2m+1)\varphi \sum_n R_n^{2m+1} \chi_n(kr) \frac{(2m+1)P^{2m+1}}{\sin\vartheta} \end{aligned} \tag{99}$$

Die einfallende Welle :

Die Darstellung (87) für $(\mathcal{L}_{einf.})_F$ läßt sich in der Form schreiben :

$$(\mathcal{L}_{einf.})_F = -\frac{e^{ik(r_o+2a)}}{r_o}\cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^*(kr_o)\, P_n^1(\cos\vartheta)$$

$$(\mathcal{L}_{einf.})_F = -\frac{e^{ik(r_o+2a)}}{r_o}\cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^*(kr_o)\frac{P_n^1}{\sin\vartheta}$$

$$(\mathcal{L}_{einf.})_F = -\frac{e^{ik(r+2a)}}{r_o}\sin\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n^*(kr_o)\frac{P_n^1}{\sin\vartheta}\,, \text{ wobei :}$$

$$\varphi_n^*(kr_o)=\sum_{p=o}^{n} i^p \frac{C_{pn}^*}{(kr_o)^p}\;;\quad \psi_n^*(kr_o)=\sum_{p=o}^{2} i^p \frac{D_{pn}^*}{(kr_o)^p}\;;\quad \chi_n^*(kr_o)=\sum_{p=o}^{n} i^p \frac{F_{pn}^*}{(kr_o)^p}$$

Die Randbedingung :

a.) Aus $(\mathcal{L}_{refl.} + \mathcal{L}_{einf.})_F = 0$ folgt für $\underline{m=o}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[R_n^1\,\chi_n(kr_o) - \chi_n^*(kr_o)\right]\frac{P_n^1}{\sin\vartheta} = 0, \text{ was mit } R_n^1=\sum_{q=o}^{\infty}\frac{R_{nq}^1}{(2ka)^q} \text{ ergibt:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n^1\left[\sum_{q=o}^{\infty}\frac{R_{nq}^1}{(2ka)^q}\sum_{p=o}^{n+1}\frac{d_{np}}{(kr_o)^p} - \sum_{p=o}^{2} i^p\frac{E_{pn}^*}{(kr_o)^p}\right] = 0$$

Mit $\frac{1}{r_o} = \frac{\sigma}{2a}(h+\cos\vartheta)$ folgt aus dem Verschwinden des Koeffizienten von k^{-p} , $p\geqq 3$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n^1(\cos\vartheta)\left[\sum_{j=o}^{p}\sigma^{p-j}\cdot R_{nj}^1\cdot d_{n,p-j}\cdot(h+\cos\vartheta)^{p-j}\right] = 0$$

Multiplikation mit $\sigma^k(h+\cos\vartheta)^k\sin\vartheta$, $k=o,1,2,\ldots$ und Integration über $\xi = \cos\vartheta$ ergibt :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=o}^{p} L_n^{p-j+k}\cdot R_{nj}^1\cdot d_{n,p-j} = 0 \qquad (100)$$

Die Formel (89) läßt sich für $n\geqq 3$ mit anderen Indices in der Form schreiben :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=o}^{p} L_n^{p-j+k} \cdot E_{p,n}^{j} = 0$$

Vergleich mit (100) ergibt: $R_{nj}^{1} \cdot d_{n,p-j} = \beta \cdot E_{p,n}^{j}$ (101)

Mit Hilfe der Formeln für d_{np} ; $E_{p,n}^{j}$ folgt wie bei der ersten Dipolorientierung : $R_{nj}^{1} = i^{j+1} \cdot C_{j+1,n}^{j}$ (102)

b.) Aus $\mathcal{W}_r(\mathcal{E}_{refl.} + \mathcal{E}_{einf.})_F = \mathcal{W}_\vartheta(\mathcal{E}_{refl.} + \mathcal{E}_{einf.})_F$

folgt für m = o :

$$(h+\cos\vartheta)\sum_{n=1}^{\infty}\left[-R_n^1 \chi_n(kr_o)\frac{d P_n^1}{d\vartheta} - \psi_n^*(kr_o)\frac{P_n^1}{\sin\vartheta}\right]$$

$$= \sin\vartheta\sum_{n=1}^{\infty}\left[S_n^1 \psi_n(kr_o) - \varphi_n^*(kr_o)\right]P_n^1$$

Multiplikation mit $\sin\vartheta$ ergibt wegen(20) :

$$(h+\cos\vartheta)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left\{\frac{(n+2)^2}{2n+3}R_{n+1}^1 \chi_{n+1}(kr_o) - \frac{(n-1)^2}{2n-1}R_{n-1}^1 \chi_{n-1}(kr_o)\right\} - \psi_n^*(kr_o)\right]P_n^1$$

$$= \sin^2\vartheta\sum_{n=1}^{\infty}\left[S_n^1 \psi_n(kr_o) - \varphi_n^*(kr_o)\right]P_n^1$$

d.h:

$$(h+\cos\vartheta)\sum_{n=1}^{\infty} P_n^1\left[\sum_{q=o}^{\infty}\left\{\frac{(n+2)^2}{2n+3}\frac{R_{n+1,q}^1}{(2ka)^q}\sum_{p=o}^{n+2}\frac{d_{n+1,p}}{(kr_o)^p} - \frac{(n-1)^2}{2n-1}\frac{R_{n-1,q}^1}{(2ka)^q}\sum_{p=o}^{n}\frac{d_{n-1,p}}{(kr)^p}\right\}\right.$$

$$\left. - \sum_{p=o}^{2} i^p \frac{D_{pn}^*}{(kr_o)^p}\right] = \sin^2\vartheta\sum_{n=1}^{\infty} P_n^1\left[\sum_{q=o}^{\infty}\frac{S_{nq}^1}{(2ka)^q}\sum_{p=o}^{n}\frac{c_{np}}{(kr_o)^{p+1}} - \sum_{p=o}^{2} i^p \frac{C_{pn}^*}{(kr_o)^p}\right]$$

Mit $\frac{1}{r_o} = \frac{6}{2a}(h+\cos\vartheta)$ folgt aus dem Verschwinden des Koeffizienten von k^{-p} , $p \geqq 3$:

$$(h+\cos\vartheta)\sum_{n=1}^{\infty} P_n^1\left[\sum_{j=o}^{p}\left\{\frac{(n+2)^2}{2n+3} R_{n+1,j}^1 \cdot d_{n+1,p-j} - \frac{(n-1)^2}{2n-1} R_{n-1,j}^1 \cdot d_{n-1,p-j}\right\}\right.$$

$$\left. \cdot 6^{p-j}(h+\cos\vartheta)^{p-j}\right] = \sin^2\vartheta\sum_{n=1}^{\infty} P_n^1\left[\sum_{j=o}^{p} S_{nj}^1 \cdot c_{n,p-j-1} \cdot 6^{p-j}(h+\cos\vartheta)^{p-j}\right]$$

Multiplikation mit $\sigma^k(h+\cos\vartheta)^k\sin\vartheta$ und Integration ergibt :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=o}^{p}\left\{\frac{(n+2)^2}{2n+3}R^1_{n+1,j}\cdot d_{n+1,p-j}-\frac{(n-1)^2}{2n-1}R^1_{n-1,j}\cdot d_{n-1,p-j}\right\}L_n^{p-j+k+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=o}^{p-1}\sigma\cdot S^1_{nj}\cdot c_{n,p-j-1}\cdot M_n^{p-j+k} \qquad (103)$$

Die Formel (88) läßt sich für $n\geq 3$ mit anderen Indices in der Form schreiben :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=o}^{p}L_n^{p-j+k+1}\cdot D^j_{p,n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=o}^{p-1}\sigma\cdot M_n^{p-j+k}\cdot C^j_{p,n}$$,was mit (86)ergibt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=o}^{p}\left\{\frac{(n+2)^2}{2n+3}E^j_{p,n+1}-\frac{(n-1)^2}{2n-1}E^j_{p,n-1}\right\}L_n^{p-j+k+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=o}^{p-1}\sigma\cdot M_n^{p-j+k}\cdot C^j_{p,n} \qquad (104)$$

Wegen (101) stimmt die linke Seite von (103) bis auf den Zahlenfaktor ß mit der linken Seite von (104) überein. Damit ist :

$S^1_{nj}\cdot c_{n,p-j-1}=ß\cdot C^j_{p,n}$, was mit Hilfe der Formeln (41) und (84) ergibt : $$S^1_{nj}=i^{j+1}\cdot C^j_{j+1,n} \qquad (105)$$

Aus (102) und (105) ist also : $S^1_{nj}=R^1_{nj}=i^{j+1}\cdot C^j_{j+1,n}$

Vergleich mit der früheren Lösung : der Vergleich läuft genauso wie bei der ersten Dipolorientierung,allerdings tritt $E^j_{n,\nu}$ statt $D^j_{n,\nu}$ auf.

Daraus sieht man, daß das erste Glied (m=o) der Reihe (99) mit der früheren Lösung übereinstimmt,welche ihrerseits die Randbedingung und die Ausstrahlungsbedingung im Unendlichen erfüllt. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung muß dieses Glied die vollständige Lösung darstellen.

Damit ist : $S_n^{2m+1}=R_n^{2m+1}=0$ für $m>o$, was mit (99) ergibt :

$$f_r = \cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} S_n \frac{\zeta_n(kr)}{r} P_n^1(\cos\vartheta)$$

$$f_\vartheta = \cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n(n+1)} \left(\frac{d\zeta_n}{dr} + \frac{\zeta_n}{r}\right) \frac{d P_n^1}{d\vartheta}$$

$$f_\varphi = -\sin\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n(n+1)} \left(\frac{d\zeta_n}{dr} + \frac{\zeta_n}{r}\right) \frac{P_n^1}{\sin\vartheta} \qquad ; \; S_n = S_n^1$$

§3. Die Cartesischen Komponenten

Mit $\frac{d\zeta_n}{dr} + \frac{\zeta_n}{r} = \frac{k}{2n+1}\left[(n+1)\zeta_{n-1} - n\,\zeta_{n+1}\right]$

; $\frac{\zeta_n}{r} = \frac{k}{2n+1}\left[\zeta_{n+1} + \zeta_{n-1}\right]$ (vergl. Seite 35) ; und :

$$\mathfrak{k}_x = \cos\varphi\,(\sin\vartheta\cdot\mathfrak{k}_r + \cos\vartheta\cdot\mathfrak{k}_\vartheta) - \sin\varphi\cdot\mathfrak{k}_\varphi$$

$$\mathfrak{k}_y = \sin\varphi\,(\sin\vartheta\cdot\mathfrak{k}_r + \cos\vartheta\cdot\mathfrak{k}_\vartheta) + \cos\varphi\cdot\mathfrak{k}_\varphi$$

$$\mathfrak{k}_z = -\cos\vartheta\cdot\mathfrak{k}_r + \sin\vartheta\cdot\mathfrak{k}_\vartheta \qquad \text{folgt :}$$

$$\mathfrak{k}^n_x = \frac{k\,S_n}{2(2n+1)}\left[(\zeta_{n-1}+\zeta_{n+1})\sin\vartheta P^1_n + \left(\frac{\zeta_{n-1}}{n} - \frac{\zeta_{n+1}}{n+1}\right)\left(\cos\vartheta\frac{d\,P^1_n}{d\vartheta} + \frac{P^1_n}{\sin\vartheta}\right)\right]$$

$$+ \frac{k\,S_n}{2(2n+1)}\cos(2\varphi)\left[(\zeta_{n-1}+\zeta_{n+1})\sin\vartheta P^1_n + \left(\frac{\zeta_{n-1}}{n} - \frac{\zeta_{n+1}}{n+1}\right)\left(\cos\vartheta\,\frac{d\,P^1_n}{d\vartheta} - \frac{P^1_n}{\sin\vartheta}\right)\right],$$

was mit Hilfe der Formeln: (5) ,(22),(23),(24) ergibt :

$$\mathfrak{k}^n_x = \frac{k\,S_n}{2(2n+1)}\left[(n+1)\zeta_{n-1}P^0_{n-1} - n\,\zeta_{n+1}P^0_{n+1}\right] - \frac{k\,S_n}{2(2n+1)}\cos(2\varphi)\left[\frac{\zeta_{n-1}}{n}P^2_{n-1} - \frac{\zeta_{n+1}}{n+1}P^2_{n+1}\right]$$

Und entsprechend :

$$\mathfrak{k}^n_y = -\frac{k\,S_n}{2(2n+1)}\sin(2\varphi)\left[\frac{\zeta_{n-1}}{n}P^2_{n-1} - \frac{\zeta_{n+1}}{n+1}P^2_{n+1}\right]$$

$$\mathfrak{k}^n_z = -\frac{k\,S_n}{2(2n+1)}\cos\varphi\left[\frac{n+1}{n}\zeta_{n-1}P^1_{n-1} + \frac{n}{n+1}\zeta_{n+1}P^1_{n+1}\right]$$

d.h: $$\mathfrak{k}_x = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\zeta_n(kr)\,P^0_n(\cos\vartheta) + \cos(2\varphi)\sum_{n=2}^{\infty}\beta_n\zeta_n(kr)\,P^2_n(\cos\vartheta)$$

$$\mathfrak{k}_y = \sin(2\varphi)\sum_{n=2}^{\infty}\beta_n\zeta_n(kr)\,P^2_n(\cos\vartheta) \qquad (106)$$

$$\mathfrak{k}_z = \cos\varphi\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\zeta_n(kr)\,P^1_n(\cos\ )$$

Mit $\zeta_n(kr) = \frac{e^{ik(r+2a)}}{kr}\,\varphi_n(kr)$ ist :

$$\psi_x = \frac{e^{ik(r+2a)}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(kr)\, P_n^0(\cos\vartheta) + \cos(2\varphi) \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \varphi_n(kr)\, P_n^2(\cos\vartheta)$$

$$\psi_y = \frac{e^{ik(r+2a)}}{r} \sin(2\varphi) \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \varphi_n(kr)\, P_n^2(\cos\vartheta)$$

$$\psi_z = \frac{e^{ik(r+2a)}}{r} \cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \varphi_n(kr)\, P_n^1(\cos\vartheta) \quad , \text{ wobei wegen (105) :}$$

$$\alpha_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_{nj}}{(2ka)^j} \quad ; \alpha_{nj} = i^{j+1} \left[\frac{(n+2) C^j_{j+1,n+1}}{2(2n+3)} - \frac{(n-1) C^j_{j+1,n-1}}{2(2n-1)} \right]$$

$$\beta_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta_{nj}}{(2ka)^j} \quad ; \beta_{nj} = i^{j+1} \left[\frac{C^j_{j+1,n-1}}{2n(2n-1)} - \frac{C^j_{j+1,n+1}}{(2n+2)(2n+3)} \right]$$

$$\gamma_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\gamma_{nj}}{(2ka)^j} \quad ; \gamma_{nj} = -i^{j+1} \left[\frac{(n+2) C^j_{j+1,n+1}}{(n+1)(2n+3)} + \frac{(n-1) C^j_{j+1,n-1}}{n(2n-1)} \right]$$

; $C^j_{j+1,\nu}$ ist die Diagonalfolge der früheren Lösung.

Aus (106) sieht man, daß jede cartesische Komponente die Wellengleichung erfüllt, wie es sein muß. Allerdings ist (106) ein Spezialfall der allgemeinen Reihe :

$$\psi_x = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n^m \cos(m\varphi) + B_n^m \sin(m\varphi) \right] \zeta_n(kr)\, P_n^m(\cos\vartheta)$$

$$\psi_y = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_n^m \cos(m\varphi) + D_n^m \sin(m\varphi) \right] \zeta_n(kr)\, P_n^m(\cos\vartheta)$$

$$\psi_z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[E_n^m \cos(m\varphi) + F_n^m \sin(m\varphi) \right] \zeta_n(kr)\, P_n^m(\cos\vartheta)$$

Und zwar mit : $B_n^m = C_n^m = F_n^m = 0$, und :

$$A_n^m = \begin{cases} \alpha_n & \text{für } m=0 \\ \beta_n & \text{für } m=2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad D_n^m = \begin{cases} \beta_n & \text{für } m=2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad E_n^m = \begin{cases} \gamma_n & \text{für } m=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

C.) Paraboloid - Dipol senkrecht zur Symmetrieachse

Die unmittelbare Lösung

In [6] wurde für die einfallende Welle eine ebene Welle angenommen, deren $\mathcal{E}$-Vektor senkrecht zur Symmetrieachse der Fläche steht. Dieser Fall entspricht beim Hyperboloid der zweiten Dipol-orientierung(Dipol senkrecht zur Symmetrieachse). Damit ist :

$$\mathcal{E}_x = f(r,\vartheta) + \cos(2\varphi).g(r,\vartheta) \; ; \; \mathcal{E}_y = \sin(2\varphi).g(r,\vartheta) \; ; \; \mathcal{E}_z = \cos\varphi.h(r,\vartheta)$$

Weil jede cartesische Komponente die Wellengleichung erfüllt, und wegen der Singularität der Lösung an $\cos\vartheta = -1$ (vergl. [6]),ist:

$$\mathcal{E}_x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta_n(kr)\left[P_n^0(\cos\vartheta) + \alpha_n Q_n^0(\cos\vartheta)\right] + \cos(2\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta_n(kr)\left[P_n^{+2}(\cos\vartheta) + \beta_n Q_n^2(\cos\vartheta)\right]$$

$$\mathcal{E}_y = \sin(2\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta_n(kr)\left[P_n^{+2}(\cos\vartheta) + \beta_n Q_n^2(\cos\vartheta)\right] \qquad (107)$$

$$\mathcal{E}_z = \cos\varphi \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta_n(kr)\left[P_n^{+1}(\cos\vartheta) + \gamma_n Q_n^1(\cos\vartheta)\right] \quad , \text{ wobei :}$$

$$\zeta_n(kr) = \frac{e^{ik(r-R/2)}}{r} \varphi_n(kr) \; ; \; \varphi_n(kr) = \sum_{p=0}^{n} \frac{c_{np}}{(kr)^p}$$

; R/2 : Brennweite der Parabel.

Weil $P_n^{+m}(\cos\vartheta)$ überall regulär,und $Q_n^m(\cos\vartheta)$ an $\cos\vartheta = \pm 1$ singulär ist, ist eine Linearkombination von P_n^{+m} und Q_n^m nicht passend.Die gegebene Singularität läßt sich aber durch eine bestimmte Linearkombination von P_n^{-m} und Q_n^m herstellen. Denn: Aus (16) und aus: $Q_n^m(\xi) = (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n}{d\xi^m}$ sieht man, daß $Q_n^m(\xi)$ für $\xi = \pm 1$ neben dem Ausdruck $\frac{1}{1-\xi^2}$ eine logarithmische Singularität enthält,welche für $m \geq n+1$ verschwindet.Also muß für die gegebene

Singularität : $n \leqq m-1$ gelten.

Nach (107) ist $m \leqq 2$,damit kommen in der Lösung nur $\zeta_0(kr)$ und $\zeta_1(kr)$ vor.

Nach (16) sind die möglichen Q-Funktionen :

$$Q_0^1 = \frac{1}{(1-\xi^2)^{1/2}} \quad ; \quad Q_0^2 = \frac{2\xi}{1-\xi^2} \quad ; \quad Q_1^2 = \frac{2}{1-\xi^2}$$

Die zugehörigen P-Funktionen sind nach (11) :

$$P_0^{-1} = \left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{1/2} \quad ; \quad P_0^{-2} = \frac{1}{2}\,\frac{1+\xi}{1-\xi} \quad ; \quad P_1^{-2} = \frac{1}{2}\,\frac{1+\xi}{1-\xi}\left[1 - \frac{2}{3}\,\frac{1-\xi}{2}\right]$$

Eine Kombination von P_1^{-2} und Q_1^2 mit der genannten Singularität ist nicht möglich, denn aus :

$$P_1^{-2} + \lambda Q_1^2 = \frac{1/2(1+\xi)^2 - 1/6(1+\xi)(1-\xi^2) + \lambda}{1-}$$

$$= \frac{\left[1/2(1+\xi)^2 + \lambda\right] - 1/6(1+\xi)(1-\xi^2)}{1-\xi^2}$$ sieht man,daß die

Singularität an $\xi = -1$ die Teilbarkeit der eckigen Klammer durch $(1-\xi)$ erfordert,was nicht möglich ist.Damit ist auch das Glied mit $\zeta_1(kr)$ auszuschließen.Die möglichen Kombinationen sind dann:

$$P_0^0 = 1 \; ; \; P_0^{-2} - Q_0^2 = \frac{1}{2}\,\frac{1-\xi}{1+\xi} \; ; \; P_0^{-1} - 2\,Q_0^1 = -\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{1/2} \; ; \; \xi = \cos\vartheta$$

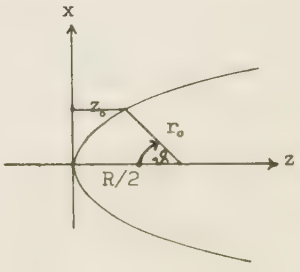
Einsetzen in (107) ergibt :

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_x &= \frac{e^{ik(r-R/2)}}{r}\left[a_0 + b_0 \cos(2\varphi)\,\frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right] \\ \mathfrak{f}_y &= \frac{e^{ik(r-R/2)}}{r}\cdot b_0 \sin(2\varphi)\,\frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta} \\ \mathfrak{f}_z &= \frac{e^{ik(r-R/2)}}{r}\cdot c_0 \cos\varphi\,\left(\frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right)^{1/2} \end{aligned} \qquad (108)$$

Mit $r_0 = \frac{R}{1+\cos\vartheta}$ ist :

$$\frac{R}{2} - r_0\cos\vartheta = r_0 - \frac{R}{2}$$

; $(\mathfrak{f}_{einf.})_F = i\,e^{ikz_0} = i\,e^{ik(r_0-R/2)}$



$$; \mathfrak{W} = (1-\cos\vartheta)^{1/2}\cos\varphi \cdot \dot{i} + (1-\cos\vartheta)^{1/2}\sin\varphi \cdot \dot{j} + (1+\cos\vartheta)^{1/2} \cdot \dot{k} \qquad (109)$$

Die Randbedingung :

Die Randbedingung $\mathfrak{W} \times (\mathfrak{f}_{einf.} + \mathfrak{f}_{refl.})_F = 0$ ist zu zwei voneinander unabhängigen Komponentenbeziehungen äquivalent , etwa :

$$\mathfrak{W}_x(\mathfrak{f}^y_{einf.} + \mathfrak{f}^y_{refl.})_F = \mathfrak{W}_y(\mathfrak{f}^x_{einf.} + \mathfrak{f}^x_{refl.})_F$$
$$; \mathfrak{W}_y(\mathfrak{f}^z_{einf.} + \mathfrak{f}^z_{refl.})_f = \mathfrak{W}_z(\mathfrak{f}^y_{einf.} + \mathfrak{f}^y_{refl.})_F \qquad (110)$$

Aus (108) , (109) , (110) folgt :

$a_o = -\frac{R}{2}$, $b_o = \frac{R}{2}$, $c_o = 2\,b_o = R$, was mit (107) ergibt :

$$\mathfrak{f}_x = R.\frac{e^{ik(r-R/2)}}{r}\left[-\frac{1}{2} + \cos(2\varphi)\left\{P_o^{-2}(\cos\vartheta) - Q_o^2(\cos\vartheta)\right\}\right]$$

$$\mathfrak{f}_y = R\,\frac{e^{ik(r-R/2)}}{r}\cdot \sin(2\varphi)\left[P_o^{-2}(\cos\vartheta) - Q_o^2(\cos\vartheta)\right]$$

$$\mathfrak{f}_z = -R\,\frac{e^{ik(r-R/2)}}{r}\cos\varphi\left[P_o^{-1}(\cos\vartheta) - 2\,Q_o^1(\cos\vartheta)\right] ,$$

in Übereinstimmung mit W. Braunbek (vergl. [1]) , allerdings dort mit anders definierten ϑ bzw. $P_n^{-m}(\cos\vartheta)$

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. Braunbek möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für die mir zuteil gewordene fördernde Betreuung meinen herzlichen Dank aussprechen.

L I T E R A T U R

[1] W.Braunbek :Ein besonders einfaches Beugungsproblem, Annalen der Physik, 988 (1963)

[2] E.W.Hobson :The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge 1931

[3] J.B.Keller, R.M.Lewis, B.D.Seckler :Asymptotic solutions of some diffraction problems, Comm. Pure Appl. Math. 9.207 (1956)

[4] W.Magnus, F.Oberhettinger :Formeln und Sätze über die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Berlin.Göttingen.Heidelberg 1948

[5] C.Müller :Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen, Berlin.Göttingen.Heidelberg 1957

[6] C.Schensted :Elektromagnetic and acoustic scattering by a semi-infinite body of revolution, Journ. Appl. Phys. 26 . 305 (1955)

[7] A.Sommerfeld :Vorlesungen über theoretische Physik Bd.VI, Wiesbaden 1947

L E B E N S L A U F

Am 28. März 1929 wurde ich als Sohn des Landbesitzers Bastawros Awad und seiner Ehefrau Sawea Tawadros in Benimazar (Ägypten) geboren. Von Oktober 1938 bis Juni 1942 besuchte ich die Volksschule in Benimazar und ab Oktober 1942 die Oberschule in Elminia. Diese verließ ich im Juni 1947 nach bestandener Reifeprüfung und begann im Oktober 1947 mein Studium an der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Einschams in Kairo. Dort legte ich im Juni 1951 das Staatsexamen ab. Von Oktober 1951 bis Mai 1959 arbeitete ich als Lehrer an verschiedenen Oberschulen in Elminia. Im Wintersemester 1959-1960 begann ich mein Physikstudium in Tübingen. Unter Leitung von Herrn Prof. Dr. W. Braunbek fertigte ich meine Diplomarbeit an über "Beugung skalarer und elektromagnetischer Wellen am Rotationshyperboloid und am hyperbolischen Zylinder" und legte im Mai 1962 die Diplomprüfung ab.

Meine akademische Ausbildung verdanke ich den Herren Professoren: W. Braunbek, G. Elwert, L. Koschmieder, H. Krüger, G. Molière, G. Möllenstedt, M. Müller, P. Roquette, H. Wielandt.